

CAPITOLUL 1

CURBE ÎN PLAN

Rezumat. Se definește noțiunea de curbă plană și se stabilesc reprezentările analitice: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $y = f(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, $F(x, y) = 0$ cu $F_x^2 + F_y^2 > 0$. Se scrie ecuația tangentei și normalei într-un punct în toate cele trei cazuri. Se definește lungimea arcului de curbă C , se stabilește

formula $L(C) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ și se introduce funcția lungime de arc

ca parametru natural. Se consideră reperul Serret – Frenet format din versorii tangentei \vec{t} și normalei \vec{n} . Variația acestui reper este descrisă de formulele

Serret – Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds} = k(s)\vec{n}$, $\frac{d\vec{n}}{ds} = -k(s)\vec{t}$, unde $s \rightarrow k(s)$, cu s lungime

de arc, este funcția curbură. Se arată că într-o parametrizare oarecare avem

$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$. Cu $\theta(s) = \angle(\vec{t}, \vec{i})$ se arată că are loc

formula $k(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$. Pe baza acesteia se demonstrează că dată funcția

continuă $k : s \rightarrow k(s)$ există o infinitate de curbe pentru care s este lungimea de arc și k este funcția curbură. În final se dă procedeul de reprezentare grafică a curbelor plane date în forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

§1. Definiții. Reprezentări analitice ale curbelor în plan

Fie un plan structurat ca spațiu euclidian E^2 cu spațiu director V^2 , mulțimea vectorilor din acel plan. În prezența unui reper ortonormat $R = \{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$ în E^2 , unei aplicații $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^2$, unde I este un interval deschis în \mathbb{R} , i se asociază aplicația vectorială $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin

$$(1.1) \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

unde funcțiile $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$ sunt coordonatele punctului $c(t)$ în reperul

$R = \{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$ sau funcțiile coordonate ale vectorului $\overrightarrow{Oc(t)}$ în baza ortonormată (\vec{i}, \vec{j}) , adică

$$(1.2) \quad \overrightarrow{Oc(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Imaginea aplicației c în E^2 corespunde noțiunii intuitive de curbă în plan: traiectoria unui mobil, urma lăsată de un spot luminos pe un ecran ș.a.. Această imagine poate fi simplă: un segment de dreaptă, un arc de cerc, o curbă “clopot” a lui Gauss, dar poate fi și foarte complicată, cum este de exemplu o electrocardiogramă. Pentru a studia curbele complicate, trebuie mai întâi să studiem pe cele simple care se obțin când aplicația c are proprietăți convenabile din punctul de vedere al calculului diferențial. O ipoteză naturală este aceea că aplicația c este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) sau, echivalent, aplicațiile coordonate $t \rightarrow x(t)$ și $t \rightarrow y(t)$ sunt de clasă C^s ($s \geq 1$) pe I .

Matricea Jacobiană a aplicației c este $J_c = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$ și deci c este imersie pe I

dacă și numai dacă

$$(1.3) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 > 0 \text{ pe } I \subseteq \mathbb{R}.$$

Această condiție este echivalentă cu

$$(1.4) \quad \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \neq 0 \text{ pe } \forall t \in I.$$

Amintim că imersia c este scufundare dacă aplicația vectorială \vec{r} este homeomorfism pe imaginea sa.

Definiția 1.1. O submulțime C în E^2 se numește **arc elementar de curbă** dacă $C = c(I)$, cu I interval deschis în \mathbb{R} și aplicația c scufundare a lui I în E^2 . Perchea (I, c) se numește parametrizare a arcului elementar C .

Fie J un alt interval deschis din \mathbb{R} și $\varphi: J \rightarrow I$, $\tau \rightarrow t = \varphi(\tau)$ un difeomorfism, adică φ este bijecție și $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$, $\forall \tau \in J$.

Propoziția 1.1. Fie C un arc elementar de curbă cu parametrizarea (I, c) . Atunci $(J, \tilde{c} = c \circ \varphi)$ este o nouă parametrizare a lui C .

Demonstrație. Avem, mai întâi, $\tilde{c}(J) = c(\varphi(J)) = c(I) = C$. Prin derivare în raport cu τ a funcției vectoriale $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$ obținem $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}$

și deci $\left\| \frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \right\| = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \right\| \left| \frac{d\varphi}{d\tau} \right|$. Rezultă că $\left\| \frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \right\| \neq 0$ pe J , adică aplicația \tilde{c} este imersie. Ea este chiar scufundare pentru că aplicația $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi : J \rightarrow \vec{\rho}(J)$ este compunerea a două homeomorfisme. ■

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu I interval deschis, o funcție diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$). Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)), x \in I\}$ din plan se numește graficul (graful) funcției f .

Propoziția 1.2. *Mulțimea G_f este un arc elementar de curbă.*

Demonstrație. Definim $c : I \rightarrow E^2$ ca aplicația care asociază lui $x \in I$ punctul P de coordonate $(x, f(x))$ și avem evident $G_f = c(I)$. Aplicația vectorială asociată aplicației c este $x \rightarrow \vec{r}(x) = (x, f(x))$ și funcția vectorială $\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, f'(x))$ are norma egală cu $\sqrt{1 + f'^2(x)} \neq 0$ pe I . Așadar c este imersie. Aplicația $\vec{r} : I \rightarrow r(I)$ este evident injectivă. Ea este continuă pentru că este de clasă C^s ($s \geq 1$). Inversa ei este de forma $(x, f(x)) \rightarrow x$, evident continuă. Așadar c este scufundare. ■

Observația 1.1. În mod similar cu demonstrația Propoziției 1.2 se arată că mulțimea de forma $\{(g(y), y), y \in I\}$ cu $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^s ($s \geq 1$) este un arc elementar de curbă.

Există mulțimi în plan despre care intuiția ne spune că sunt curbe dar care nu sunt arce elementare de curbă. Această situație a condus la

Definiția 1.2. *Se numește curbă în plan o submulțime \mathbb{C} a planului cu proprietatea că orice punct al ei aparține cel puțin unui arc elementar de curbă inclus în \mathbb{C} .*

Această definiție nu acoperă în totalitate noțiunea intuitivă de curbă în plan. Ea numai delimitează o clasă de curbe în plan, suficient de amplă pentru a merita să fie studiată și care are proprietăți interesante și utile. Această clasă de curbe este obiectul prezentului capitol. Vom începe prin a vedea cum se reprezintă analitic, în repere ortonormate, aceste curbe.

În reperul ortonormat $R = \{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$ notat uneori și prin Oxy , vom scrie $P(x, y)$ sau $P(\vec{r})$ pentru a indica faptul că punctul P din E^2 are coordonatele carteziane (x, y) sau vectorul de poziție $\vec{r} = xi + yj$.

Teorema 1.1. Mulțimea $\mathbb{C} = \left\{ P(r) \mid \vec{r} = \vec{r}(t), t \in (a, b) \text{ cu aplicația vectorială } t \rightarrow \vec{r}(t) \text{ de clasă } C^s (s \geq 1) \text{ și cu } \vec{r}'(t) \neq \vec{0} \text{ pe } (a, b) \right\}$ este o curbă în plan.

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din \mathbb{C} aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în \mathbb{C} .

Fie $P_0(\vec{r}_0) \in \mathbb{C}$ cu $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$. Așadar $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq 0$. Să presupunem, pentru a face o alegere, că $x'(t_0) \neq 0$. Rezultă din continuitate că $x' \neq 0$ pe $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ și, în consecință, funcția reală $x: t \rightarrow x(t)$ definită pe I este strict monotonă pe I , deci injectivă și, ca atare, bijecție de la I în $J = x(I)$. Notăm inversa ei prin $x^{-1}: x \rightarrow t = h(x)$. Mai mult, pentru că funcția reală x este diferențiabilă de clasă C^s și $x' \neq 0$ pe I , x^{-1} este de asemenea diferențiabilă de clasă C^s . Înlocuim $t = h(x)$ în ecuația $y = y(t)$ și obținem $y = y(h(x)) = f(x)$ cu $x \in J$, interval deschis în \mathbb{R} . Funcția $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) pentru că este compunerea a două funcții diferențiabile de clasă C^s .

Considerăm graficul $G_f = \{(x, f(x)), x \in J\}$ al aplicației f . După Propoziția 1.2, acesta este un arc elementar de curbă. Punctul $P_0 \in G_f$. El se obține pentru valoarea $x_0 = x(t_0)$. Mulțimea G_f este inclusă în \mathbb{C} pentru că este formată din punctele lui \mathbb{C} date de valorile t din intervalul I . Așadar P_0 aparține unui arc elementar de curbă conținut în \mathbb{C} .

În cursul demonstrației am făcut presupunerea că $x'(t_0) \neq 0$. Dacă $x'(t_0) = 0$ atunci, în mod necesar, $y'(t_0) \neq 0$ și cu același raționament arătăm că P_0 aparține unui arc elementar de forma $\{(g(y), y)\}$ cu y într-un interval deschis, conținut în \mathbb{C} . ■

Pe baza Teoremei 1.1, ecuația

$$(1.5) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), t \in (a, b), \vec{r}'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b),$$

reprezintă analitic o curbă în plan. Această reprezentare se numește reprezentarea *vectorial – parametrică* a unei curbe în plan. Reprezentarea (1.5) se poate explicita în forma

$$(1.5)' \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in (a, b), x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \forall t \in (a, b) \end{cases}$$

și se obține așa numita reprezentare *parametrică* a unei curbe în plan.

Fie D o mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 și o aplicație $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$). Vom nota derivatele parțiale ale ei prin F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy} etc.

Teorema 1.2. *Dacă mulțimea $C = \{P(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$, unde $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cu D mulțime deschisă, este o funcție diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) și $F_x^2 + F_y^2 > 0$ pe D este nevidă, atunci ea este o curbă în plan.*

Demonstrație. Fie $P_0(x_0, y_0) \in C \neq \emptyset$, adică $F(x_0, y_0) = 0$. Vom arăta că P_0 aparține cel puțin unui arc elementar de curbă conținut în C . Condiția $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) > 0$ ne arată că fie $F_x^2(x_0, y_0) \neq 0$, fie $F_y^2(x_0, y_0) \neq 0$ fără a exclude posibilitatea ca ambele situații să aibă loc. Presupunem $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. În caz contrar, avem $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ și se face un raționament asemănător cu cel ce urmează. Din continuitatea funcției F_y rezultă că $F_y \neq 0$ pe o mulțime deschisă D' centrată în (x_0, y_0) . Printr-o eventuală micșorare a sa, putem lua D' de forma $D' = I \times J$ cu I un interval deschis centrat în x_0 și J un interval deschis centrat în y_0 . Teorema funcțiilor implicite ne spune că putem “explicita” y din ecuația $F(x, y) = 0$ cu $(x, y) \in D' \subset D$. Mai precis, există o aplicație unică $f: I \rightarrow J$, $x \rightarrow f(x)$ diferențiabilă de clasă C^s încât i) $f(x_0) = y_0$, ii) $F(x, f(x)) \equiv 0$ pe I . Mulțimea $C = \{(x, f(x)), x \in I\}$ este un arc elementar de curbă conform Prop. 1.2. Egalitatea i) ne spune că acesta conține P_0 iar identitatea ii) ne arată că el este conținut în C . ■

Pe baza Teoremei 1.2, ecuația

$$(1.6) \quad F(x, y) = 0, (x, y) \in D$$

cu D deschisă în \mathbb{R}^2 și condiția $F_x^2 + F_y^2 > 0$ pe D , reprezintă analitic o curbă în plan. Această reprezentare se numește *reprezentare implicită* a curbei în plan.

La reprezentările analitice (1.5) și (1.6) ale unei curbe în plan vom adăuga și reprezentările analitice

$$(1.7) \quad y = f(x), x \in (a, b)$$

sau

$$(1.7') \quad x = g(y), y \in (c, d),$$

numite și reprezentări *explicite* ale unei curbe în plan. Ecuațiile (1.7) și (1.7') reprezintă analitic întotdeauna arce elementare de curbă în plan dar, cum acestea sunt curbe plane particulare, vom spune că ecuațiile (1.5), (1.5'), (1.6), (1.7) și (1.7') constituie reprezentări analitice ale curbelor în plan.

Cele trei reprezentări analitice ale curbelor în plan sunt local echivalente în sensul că fiecare punct al curbei este conținut de un arc elementar de curbă pe care se poate trece de la una din oricare cele trei reprezentări la celelalte două. De exemplu, dacă curba (arc elementar) este dată prin ecuația $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, cu notația $x = t$ obținem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), t \in (a, b), \end{cases}$$

pentru ca $x'^2 + y'^2 = 1 + f'^2 > 0$ pe (a, b) .

Cu notația $F(x, y) = y - f(x)$ obținem reprezentarea implicită

$$F(x, y) = 0 \quad (x, y) \in D = (a, b) \times (f(a), f(b))$$

pentru că

$$F_x^2 + F_y^2 = 1 + f'^2 > 0 \text{ pe } D.$$

Dacă avem curba dată parametric, în demonstrația Teoremei 1.1 am văzut cum, pentru orice punct P , putem găsi un arc elementar ce-l conține, de ecuație explicită (1.7) sau (1.7'). De la (1.7) sau (1.7') putem trece la (1.6). În sfârșit, dacă dispunem de reprezentarea analitică (1.6), în demonstrația Teoremei 1.2 am văzut cum pentru orice punct P al curbei se găsește un arc elementar ce-l conține, de ecuație (1.7) sau (1.7') iar de la acestea se trece imediat la reprezentarea parametrică (1.5).

Funcțiile care apar în cele trei reprezentări analitice ale unei curbe în plan sunt diferențiabile de clasă C^s ($s \geq 1$) pe domeniul lor de definiție. În continuare vom folosi numai adjectivul “diferențiabile” fără a mai menționa explicit clasa de diferențiabilitate. Dar vom presupune că aceasta este suficientă pentru a deriva ori de câte ori avem nevoie. În cele mai multe situații, clasa de diferențiabilitate C^3 se dovedește a fi suficientă.

§2. Tangentă și normală într-un punct al unei curbe în plan

Pentru început vom descrie proprietăți punctuale (care au loc într-un punct al curbei) și proprietăți locale (care au loc pe un arc elementar) ale curbelor în plan. De regulă, nu vom lua curba în întregime ci ne vom plasa pe un arc elementar al ei care admite toate cele trei reprezentări analitice găsite în §1. Un asemenea arc va fi notat prin C și-l vom numi curbă plană, pentru simplitate.

Fie, pentru început, arcul elementar de curbă C dat explicit prin

$$(2.1) \quad y = f(x), x \in (a, b).$$

Fie $P_0(x_0, f(x_0)) \in C$ și $P_1(x_1, f(x_1))$ un punct pe C “vecin” cu P_0 în sensul că $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, suficient de mic. Dreapta P_0P_1 are panta $m(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Dacă fixăm x_0 rezultă $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} m(x_1, x_0) = f'(x_0)$ (limita există!).

Dreapta prin P_0 , de pantă $f'(x_0)$ poate să se numească dreaptă tangentă la curbă pentru că există un arc elementar ce conține P_0 care are în comun cu ea numai P_0 . Considerații de Mecanică justifică, de asemenea, această denumire. Așadar avem

Definiția 2.1. Fie o curbă C în plan reprezentată de ecuația (2.1). Dreapta prin punctul $P_0(x_0, y_0) \in C$ de pantă $f'(x_0)$ se numește tangentă la C în P_0 .

Observația 2.1. Dacă $x'(t_0) = 0$, vom lua tangenta paralelă cu Oy .

Ecuația tangentei la C în P_0 este

$$(2.2) \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie curba C reprezentată parametric prin (1.5'). Ne propunem să scriem ecuația tangentei la curbă într-un punct $P_0(x_0, y_0)$ cu $x_0 = x(t_0)$ și $y_0 = y(t_0)$, pentru care $x'(t_0) \neq 0$. După cum am văzut în demonstrația Teoremei 1.1, pentru $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ putem inversa funcția $t \rightarrow x(t)$ și obținem funcția inversă $t = t(x)$ care înlocuită în ecuația $y = y(t)$ ne conduce la reprezentarea explicită a unui arc elementar ce conține punctul P_0 și este inclus în C de forma $y = f(x) = y(t(x))$, unde evident $y_0 = f(x_0) = y(t(x_0))$ și $t(x_0) = t_0$.

Pentru a folosi ecuația (2.2) avem nevoie de $f'(x_0)$. Prin derivare compusă în raport cu x în egalitatea $f(x) = y(t(x))$ obținem $f'(x_0) = \frac{dy}{dt}(t(x_0)) \frac{dt}{dx}(x_0)$. Prin derivarea identității $t(x(t)) \equiv t$ în raport cu $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ obținem $\frac{dt}{dx}(x(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0) = 1$, deci $\frac{dt}{dx}(x_0) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}(t_0)}$. Așadar $f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ și după (2.2)

ecuația tangentei în P_0 la C se scrie în forma $y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0)$ sau în forma

$$(2.3) \quad \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Forma (2.3) a ecuației tangentei la C în punctul P_0 ne spune că direcția tangentei este dată de vectorul $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$, unde \vec{r} este funcția vectorială care dă reprezentarea vectorial – parametrică a curbei.

Ecuația (2.3) se mai poate scrie în forma

$$(2.3') \quad \begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sau vectorial

$$(2.3'') \quad \vec{r} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

În sfârșit, fie curba C reprezentată implicit prin (1.6). Ne propunem să scriem ecuația tangentei la C într-un punct $P_0(x_0, y_0) \in C$. Presupunem că $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Există un arc elementar care conține P_0 , inclus în C , reprezentat explicit în forma $y = f(x)$ cu $y_0 = f(x_0)$ și $F(x, f(x)) \equiv 0$ pe I (ne referim la notațiile din demonstrația Teoremei 1.2). Prin derivare în raport cu x a identității

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ obținem } F_x + F_y f' = 0 \text{ și deci } f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

După (2.2), ecuația tangentei la C în punctul P_0 se scrie în forma $y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$

sau în forma

$$(2.4) \quad (x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Continuăm să considerăm curba plană C și punctul $P_0 \in C$.

Definiția 2.2. Perpendiculara pe tangenta la C în punctul P_0 se numește normala la curba C în P_0 .

Dacă avem pentru C reprezentarea explicită (2.1), cum panta tangentei este $f'(x_0)$, panta normalei va fi $-\frac{1}{f'(x_0)}$ dacă $f'(x_0) \neq 0$ sau va fi paralelă cu Oy dacă $f'(x_0) = 0$ și deci ecuația normalei în acest caz este

$$(2.5) \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

dacă $f'(x_0) \neq 0$, respectiv $x = x_0$ dacă $f'(x_0) = 0$.

În cazul reprezentării parametrice, am constatat că direcția tangentei este dată de vectorul $(x'(t_0), y'(t_0))$. Direcția normalei va fi dată de un vector perpendicular pe acesta, de exemplu de vectorul $(-y'(t_0), x'(t_0))$.

Ecuația normalei este în acest caz

$$(2.6) \quad (x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) = 0.$$

Fie acum C reprezentată implicit. Panta tangentei în punctul $P(x_0, y_0) \in C$ este $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$. Deci panta normalei este $\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}$ dacă $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ sau

normala este paralelă cu Oy dacă $F_x(x_0, y_0) = 0$. Ecuația normalei este în acest caz

$$(2.7) \quad (x - x_0)F_y(x_0, y_0) - (y - y_0)F_x(x_0, y_0) = 0,$$

respectiv $x = x_0$ dacă $F_x(x_0, y_0) = 0$.

Tangenta și normala fiind perpendiculare, pot fi luate ca axele unui sistem cartezian de coordonate cu originea în P_0 , sistem de coordonate care variază odată cu punctul P_0 pe C adică este *mobila* pe curba C . Vom reveni mai târziu asupra acestei idei.

§3. Lungimea unui arc de curbă plană. Parametrizații naturale.

Fie un arc elementar de curbă plană reprezentat explicit în forma

$$(3.1) \quad y = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Considerarea intervalului închis $[a, b]$ creează probleme în definirea diferențiabilității funcției f . Dar se convine că f este diferențiabilă pe $[a, b]$ dacă există o funcție \tilde{f} diferențiabilă pe $I \supset [a, b]$ cu $\tilde{f}|_{[a, b]} = f$, unde ca mai sus I este un interval deschis în \mathbb{R} .

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Punctele $A = A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)), \dots, A_i(x_i, f(x_i)), \dots, A_n(x_n, f(x_n)) = B$ determină o linie poligonală înscrisă în arcul elementar \widehat{AB} dat. Lungimea acestei linii poligonale este

$$(3.2) \quad l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Inegalitatea triunghiulară ne arată că la o rafinare a diviziunii Δ , lungimea l_Δ nu descrește (Fig. 1).

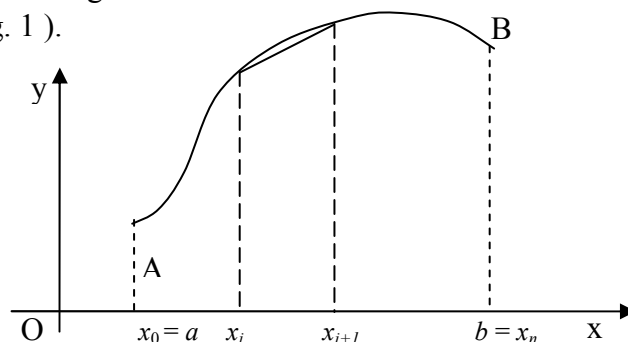


Fig. 1

Această observație ne atrage atenția asupra mărginirii superioare a mulțimii $\{l_\Delta\}$ când Δ parcurge mulțimea diviziunilor lui $[a, b]$.

Definiția 3.1. Se spune că arcul de curbă \widehat{AB} are **lungime** sau că este **rectifiabil** dacă mulțimea $\{l_\Delta\}$ este mărginită superior. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea arcului \widehat{AB} .

Pe baza teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, lungimea l_Δ se scrie în forma

$$(3.3) \quad l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i), \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}$$

și se constată că l_Δ are forma sumei Riemann pentru funcția $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Integrala Riemann a acestei funcții există dacă de exemplu f' este funcție continuă încât avem

Teorema 3.1. Fie arcul de curbă \widehat{AB} reprezentat prin (3.1) cu f funcție diferențiabilă de clasă C^1 . Atunci arcul de curbă \widehat{AB} are lungime. Aceasta se calculează cu formula

$$(3.4) \quad l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Fie acum un arc elementar de curbă \widehat{AB} în plan reprezentat parametric în forma

$$(3.5) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Presupunem că $x'(t) > 0$ pe $[t_0, t_1]$ și deci funcția $x = x(t)$ se poate inversa obținându-se funcția $t = h(x)$ cu $x \in [a, b]$. Înlocuind t în ecuația $y = y(t)$ obținem reprezentarea explicită $y = f(x) = y(h(x))$ cu f diferențiabilă. Din considerațiile precedente, este suficient ca f să fie diferențiabilă de clasă C^1 pentru ca arcul \widehat{AB} să

aibă lungime. Ori f este astfel dacă funcțiile $t \rightarrow x(t)$ și $t \rightarrow y(t)$ sunt diferențiabile de clasă C^1 . Ne interesează o formulă de calcul a lungimii când se dă reprezentarea (3.5) a arcului \widehat{AB} .

Cu experiența din §2, formula (3.4) ne dă

$$l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}(h(x)) \right)^2} dx$$

Prin derivarea identității $x(h(x)) \equiv x$ obținem

$$x'(h(x)) \frac{dh}{dx}(x) = 1$$

sau

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{1}{x'(h(x))}.$$

Deci

$$(*) \quad l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{x'^2(h(x)) + y'^2(h(x))} \frac{dx}{|x'(h(x))|},$$

unde prin x', y' am notat derivatele acestor funcții în raport cu t .

În integrala obținută efectuăm schimbarea de variabilă $h(x) = t$ mai întâi în ipoteza că $x'(h(x)) > 0$ pe $[a, b]$. Avem $h(a) = t_0, h(b) = t_1$ și

$$dt = \frac{dh}{dx}(x) dx = \frac{dx}{x'(h(x))} \text{ încât integrala devine}$$

$$(3.6) \quad l_{\widehat{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Dacă $x'(h(x)) < 0$ pe $[a, b]$ în formula (*) apare un semn minus și o inversare a limitelor de integrare, fenomene care se anulează reciproc și se obține aceeași formulă (3.6) care este formula de calcul a lungimii unui arc de curbă reprezentat parametric.

Este evident că integrala (3.4) este un caz particular al integralei (3.6) și anume când parametrizarea arcului este de forma $\begin{cases} x = x \\ y = f(x), x \in [a, b] \end{cases}$.

Ele dau același rezultat, lungimea arcului \widehat{AB} . Observația sugerează că ar trebui să ne asigurăm că integrala din (3.6) nu depinde de parametrizarea arcului \widehat{AB} . Acest lucru se poate face efectuând o schimbare de parametru pe \widehat{AB} (exercițiu!) dar rezultă și direct din observația că orice parametrizare am lua pe \widehat{AB} , prin explicitare ajungem la aceeași funcție f din (3.1).

Continuăm să folosim reprezentarea parametrică (3.5) a arcului \widehat{AB} . Considerăm funcția

$$(3.7) \quad s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau,$$

numită funcție lungime de arc.

Din $s(t_0) = 0$, $s(t_1) = l_{\widehat{AB}} = L$ și $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} > 0$ rezultă că $s: [t_0, t_1] \rightarrow [0, L]$, $t \rightarrow s(t)$ este o funcție strict monoton crescătoare, deci inversabilă cu inversa $h: [0, L] \rightarrow [t_0, t_1]$, $s \rightarrow t = h(s)$. În plus, funcția s este diferențiabilă. Pentru că funcția s este bijectivă și $\frac{ds}{dt} \neq 0$ pe $[t_0, t_1]$, această funcție este difeomorfism.

Efectuăm schimbarea de parametru pe \widehat{AB} prin înlocuirea lui t cu $t = h(s)$. Obținem

$$(3.8) \quad \begin{cases} x = \tilde{x}(s) = x(h(s)) \\ y = \tilde{y}(s) = y(h(s)), s \in [0, L] \end{cases}$$

Vom spune că am parametrizat arcul \widehat{AB} prin lungimi de arc. Aceasta înseamnă că precizăm poziția unui punct P pe \widehat{AB} prin indicarea lungimii arcului \widehat{AP} , motiv pentru care această parametrizare se numește și *naturală* sau *canonică*.

Parametrizarea prin lungime de arc are o proprietate specială și anume

$$(3.9) \quad \left(\frac{d\tilde{x}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{ds} \right)^2 = 1,$$

adică mărimea vectorului tangent la curbă este constantă egală cu 1.

Într-adevăr, $\frac{d\tilde{x}}{ds} = x'(t(s)) \cdot \frac{dh}{ds}$ și $\frac{d\tilde{y}}{ds} = y'(t(s)) \cdot \frac{dh}{ds}$ și prin ridicare la pătrat și

$$\text{însurmare obținem } \left(\frac{d\tilde{x}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{ds} \right)^2 = (x'(t(s))^2 + y'(t(s))^2) \left(\frac{dh}{ds} \right)^2.$$

Prin derivarea identității $h(s(t)) \equiv t$ rezultă $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$. Obținem funcția

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t(s)) + y'^2(t(s))}} \text{ care înlocuită mai sus conduce la (3.9).}$$

În continuare vom folosi frecvent parametrizarea naturală pentru rezolvarea unor probleme teoretice. În practică, integrala din (3.7) nu este ușor de calculat încât se operează cu parametrizări care nu satisfac în mod necesar (3.9). Se poate arăta că egalitatea (3.9) este verificată în esență numai pentru parametrizările prin lungime de arc (exercițiu!).

§4. Reperul Serret – Frenet într-un punct al unei curbe plane. Curbură.

Fie o curbă plană reprezentată parametric, cu lungimea de arc s ca parametru.

$$(4.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(s), \quad s \in [0, L], \quad \left\| \frac{\dot{\vec{r}}(s)}{\|\dot{\vec{r}}(s)\|} \right\| = \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1.$$

Versorul tangentei la curbă este $\vec{t}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s)}{\|\dot{\vec{r}}(s)\|} = \dot{\vec{r}}(s)$. Notăm prin $\vec{n}(s)$

versorul normalei la curbă în punctul $P(s)$. Alegem sensul lui \vec{n} încât baza (\vec{t}, \vec{n}) să fie pozitiv orientată.

Definiție. Reperul $\mathfrak{R} = \{P(s), (\vec{t}(s), \vec{n}(s))\}$ se numește reperul Serret – Frenet al curbei plane (4.1). Cu s variabil în $[0, L]$ avem un reper mobil pe curba (4.1).

În reperul $\{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$ fixat în plan, ecuația curbei se scrie pe componente în forma

$$(4.2) \quad \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad s \in [0, L], \quad \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1. \end{cases}$$

Rezultă $\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}$ iar condiția $\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle = 0$ ne arată că putem lua $\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(s) \\ \dot{x}(s) \end{pmatrix}$. Poziția semnelor “-” se impune pentru a ne asigura că baza (\vec{t}, \vec{n}) este pozitiv orientată, adică matricea schimbării acestei baze cu baza (\vec{i}, \vec{j}) să

fie de determinat 1. Într- adevăr, cu această alegere, matricea în discuție este

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{bmatrix} \text{ și are determinantul egal cu 1.}$$

Prin derivare în raport cu s a egalității $\vec{t}^2(s)=1$, obținem $\left\langle \vec{t}(s), \dot{\vec{t}}(s) \right\rangle = 0$.

Așadar vectorul $\dot{\vec{t}}(s)$ este perpendicular pe $\vec{t}(s)$. El este deci coliniar cu $\vec{n}(s)$.

Punem $\dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$. Prin același raționament dar plecând de la $\vec{n}^2(s)=1$

obținem $\dot{\vec{n}}(s) = \tilde{\kappa}(s)\vec{t}(s)$. Prin derivarea egalității $\left\langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \right\rangle = 0$ obținem

$$\left\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s) \right\rangle + \left\langle \vec{t}(s), \dot{\vec{n}}(s) \right\rangle = 0 \text{ și folosind expresiile tocmai găsite pentru } \dot{\vec{t}}(s) \text{ și } \dot{\vec{n}}(s)$$

rezultă $\tilde{\kappa}(s) + \kappa(s) = 0$.

Rezumând, am obținut formulele lui Serret – Frenet pentru o curbă plană

$$(4.3) \quad \dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s), \quad \dot{\vec{n}}(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s).$$

În aceste formule apare funcția $\kappa : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ numită curbura curbei plane (4.1).

Din prima formulă (4.3) rezultă $|\kappa(s)| = \left| \dot{\vec{t}}(s) \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Vom da o interpretare geometrică foarte utilă a curburii unei curbe plane.

Fie $\theta(s)$ unghiul format de versorul $\vec{t}(s)$ cu versorul \vec{i} . Acest unghi este desenat în Fig. 2.

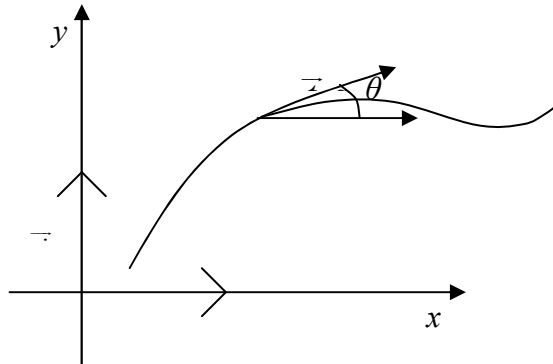


Fig. 2

Rezultă imediat $\dot{x}(s) = \langle \vec{t}(s), \vec{i} \rangle = \cos \theta(s)$, $\dot{y}(s) = \langle \vec{t}(s), \vec{j} \rangle = \sin \theta(s)$ și prin derivare în raport cu s obținem $\ddot{x} = -\dot{\theta}(s) \sin \theta(s)$, $\ddot{y} = \dot{\theta}(s) \cos \theta(s)$, $\dot{\theta}(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$. Prima formulă Serret – Frenet se scrie pe componente în forma $\ddot{x} = -\kappa \dot{y}$, $\ddot{y} = \kappa \dot{x}$, care combinată cu formulele tocmai obținute pentru \ddot{x} și \ddot{y} ne conduce la

$$(4.4) \quad \kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}, \quad s \in [0, L].$$

Aceasta este interpretarea geometrică a curburii unei curbe în plan. Formula (4.4) ne permite să obținem o formulă de calcul a curburii în parametrizație naturală s .

Un calcul simplu ne arată că are loc egalitatea $\dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s) = \dot{\theta}(s)$ și deci

$$(4.5) \quad \kappa(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s), \quad s \in [0, L].$$

Să presupunem că lungimea de arc s provine de la o parametrizare a curbei cu t , adică $s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau$. Integrala care dă s se calculează greu și de multe ori funcția $t \rightarrow s(t)$ nu se poate determina explicit. Încât în practică formula (4.5) nu este satisfăcătoare pentru calculul funcției curbură. Vom deduce o formulă care ne permite să calculăm curbura plecând de la o parametrizare oarecare. Reținem că $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. Punem $s = s(t)$ în ecuațiile (4.2) și obținem $x = x(s(t))$, $y = y(s(t))$. Derivăm aceste funcții, în raport cu t de două ori și obținem: $x'(t) = \dot{x}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt}$, $y'(t) = \dot{y}(s(t)) \cdot \frac{ds}{dt}$, $x''(t) = \ddot{x}(s(t)) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{x}(s(t)) \frac{d^2s}{dt^2}$, $y''(t) = \ddot{y}(s(t)) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{y}(s(t)) \frac{d^2s}{dt^2}$.

Evaluăm expresia $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$. Folosind și (4.5) obținem

$$x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = \kappa(s(t)) \left(\frac{ds}{dt} \right)^3$$

Așadar avem următoarea formulă de calcul a curburii unei curbe plane

$$(4.6) \quad \kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Observația 4.1. Funcția curbură a curbei plane C nu depinde de reperul ortonormat ales în E^2 . Faptul decurge din (4.4). Într-adevăr, la o translație a reperului, funcția $s \rightarrow \theta(s)$ rămâne aceeași iar la o rotație de unghi α (acesta nu depinde de s) funcția $s \rightarrow \theta(s)$ trece în $s \rightarrow \theta(s) \pm \alpha$. Aceste funcții au aceeași derivată.

Observația 4.2. Fixăm reperul $R = \{\vec{O}, (\vec{i}, \vec{j})\}$ și efectuăm o translație și apoi o rotație de unghi α a planului E^2 . Curba C își modifică poziția în plan dar, ca mai sus, se constată că derivata funcției $s \rightarrow \theta(s)$ este aceeași adică funcția curbură a curbei rămâne aceeași. Compunerea unei translații cu o rotație directă se numește deplasare în planul E^2 . Deplasările sunt izometrii ale lui E^2 .

Observația 4.3. Pentru diverse parametrizări ale curbei obținem funcții curbură care au domenii de definiție diferite dar au aceeași mulțime de valori. Într-adevăr, cu un calcul asemănător celui prin care am obținut (4.6) se arată că avem $\kappa(\varphi(t)) = \kappa(t)$, $t \in I$ cu $\varphi: I \rightarrow J$ un difeomorfism al intervalelor deschise I și J din \mathbb{R} .

§5. Teorema fundamentală a geometriei curbilor plane

Am văzut că oricărei curbe în plan i se asociază funcția curbură care se poate calcula prin formula (4.6) sau (4.5).

Această funcție curbură determină complet curba în sensul teoremei următoare, numită și teorema fundamentală a curbilor plane.

Teorema 5.1. Fiind dată o funcție $k: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $s \rightarrow \kappa(s)$, de clasă C^r , $r \geq 0$, există o curbă, unică până la o deplasare în plan, pentru care s este lungime de arc și funcția k este funcția curbură a curbei.

Demonstrația existenței. Fie $s_0 \in [0, L]$. Considerăm ecuația diferențială

$\dot{\theta}(s) = k(s)$. Prin integrarea ei obținem

$$(5.1) \quad \theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s k(\tau) d\tau,$$

unde $\theta_0 = \theta(s_0)$ este un număr real oarecare.

Fie sistemul de ecuații diferențiale în necunoscutele x, y

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \cos \theta(s) \\ \dot{y}(s) = \sin \theta(s), \end{cases}$$

cu $s \in [0, L]$ și unghiul $\theta(s)$ dat de (5.1). Prin integrarea acestui sistem obținem

$$(5.2) \quad \begin{cases} x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(\sigma) d\sigma \\ y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin \theta(\sigma) d\sigma \end{cases}$$

cu $x_0 = x(s_0), y_0 = y(s_0)$ numere reale oarecare.

Aplicația $s \rightarrow (x(s), y(s))$ este curba căutată, adică o curbă plană pentru care s este lungime de arc și k funcția curbură a ei. Într-adevăr, lungimea ei de arc

$$\int_0^s \sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)} d\sigma = \int_0^s ds = s, \text{ iar curbură}$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \dot{\theta} \cos^2 \theta + \dot{\theta} \sin^2 \theta = \dot{\theta}(s) = k(s) \quad \forall s \in [0, L].$$

Comentariu asupra unicității. În demonstrația existenței apar condițiile inițiale: punct (x_0, y_0) , direcție θ_0 , arbitrare. Deci există o infinitate de curbe pentru care s este lungime de arc și k funcție curbură. Sintagma “unică până la o deplasare în plan” înseamnă că oricare două dintre aceste curbe se pot suprapune printr-o deplasare în plan. Pentru demonstrație a se vedea [1, p.25]. Rezultă că prin deplasări convenabile le putem suprapune pe toate peste una fixată.

Aplicație. Să se determine curbele plane de curbură constantă $k \neq 0$. Rezultă $\theta(s) = \theta_0 + k(s - s_0)$ și

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{k} \sin(\theta_0 + k(s - s_0)) \\ y(s) = -\frac{1}{k} \cos(\theta_0 + k(s - s_0)) \end{cases}$$

Așadar $x^2(s) + y^2(s) = \frac{1}{k^2}$, deci curba plană de curbură constantă $k \neq 0$

este un arc de cerc de rază $\frac{1}{k}$.

Curbele plane de curbură zero sunt, evident, drepte în plan.

§6. Forma arcului unei curbe plane în vecinătatea unui punct. Puncte singulare

Fie curba plană (C) $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \end{cases} s \in [0, L]$, cu s parametru natural și

$P(x(s), y(s))$ un punct al curbei C . Considerăm un punct “vecin lui P ”, $Q(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s))$ cu Δs o mică variație a lui s . În punctul P avem reperul Serret – Frenet $\{P, (\vec{t}(s), \vec{n}(s))\}$. În acest reper vectorul \overrightarrow{PQ} se scrie în forma

$$(6.1) \quad \overrightarrow{PQ} = \tilde{x}(\Delta s) \vec{t}(s) + \tilde{y}(\Delta s) \vec{n}(s).$$

Pe de altă parte $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s) = (x(s+\Delta s) - x(s), y(s+\Delta s) - y(s))$ sau, după aplicarea formulei lui Taylor și omiterea termenilor care conțin puteri ≥ 3 ale lui Δs , $\overrightarrow{PQ} = \left(\dot{x}(s) \frac{\Delta s}{1!} + \ddot{x}(s) \frac{(\Delta s)^2}{2!}, \dot{y}(s) \frac{\Delta s}{1!} + \ddot{y}(s) \frac{(\Delta s)^2}{2!} \right) = \dot{\vec{r}}(s) \frac{\Delta s}{1!} + \ddot{\vec{r}}(s) \frac{(\Delta s)^2}{2!}$.

Continuăm prin aplicarea formulelor lui Frenet. Rezultă $\overrightarrow{PQ} = \vec{t}(s) \frac{\Delta s}{1!} + k \vec{n}(s) \frac{(\Delta s)^2}{2!}$.

Prin comparație cu (6.1) obținem

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \tilde{x}(\Delta s) &= \frac{\Delta s}{1!}, \\ \tilde{y}(\Delta s) &= k \frac{(\Delta s)^2}{2!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$

cu ε suficient de mic în valoare absolută.

Formula (6.2) ne permite să desenăm arcul de curbă în vecinătatea punctului P . Din (6.2) rezultă

$$(6.2') \quad \tilde{y} = \frac{k}{2} \tilde{x}^2,$$

formulă care ne arată că arcul de curbă în vecinătatea lui P are forma unui arc de parabolă cu vârful în P și deschiderea indicată de sensul normalei principale (baza (\vec{t}, \vec{n}) este pozitiv orientată) dacă are loc $k > 0$ și cu deschiderea în sens opus dacă are loc $k < 0$. Considerațiile de mai sus sunt valabile pentru punctul P neinflexionar.

Dacă P este inflexionar, considerând în dezvoltarea Taylor a funcțiilor $s \rightarrow x(s), s \rightarrow y(s)$ și termeni ce conțin $(\Delta s)^3$ formulele (6.2) se înlocuiesc cu

$$\begin{aligned}
 (6.2'') \quad \tilde{x}(\Delta s) &= \frac{\Delta s}{1!} - k^2 \frac{(\Delta s)^3}{3!}, \\
 \tilde{y}(\Delta s) &= k \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dot{k} \frac{(\Delta s)^3}{3!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon)
 \end{aligned}$$

care în ipoteza $k(s) = 0$ se reduc la

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad \tilde{x}(\Delta s) &= \frac{\Delta s}{1!}, \\
 \tilde{y}(\Delta s) &= \dot{k} \frac{(\Delta s)^3}{3!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Rezultă

$$(6.3') \quad \tilde{y} = \dot{k} \tilde{x}^3.$$

Deci arcul curbei C în vecinătatea punctului inflexionar P are forma unui arc de parabolă cubică (Fig. 4)

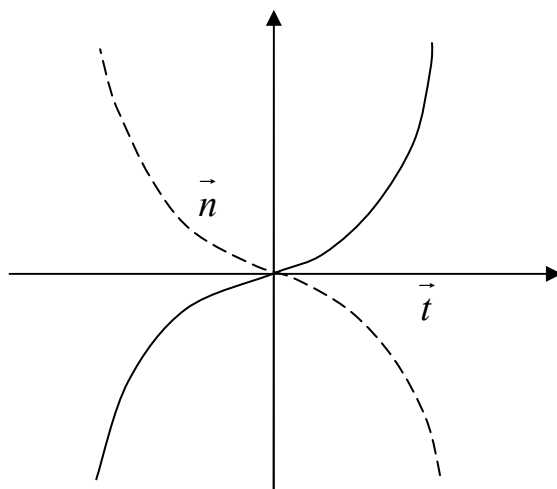


Fig. 4. Arcul plin reprezintă cazul $\dot{k} > 0$ iar cel punctat reprezintă cazul $\dot{k} < 0$

Formulele (6.2) și (6.3) ne permit să construim graficul curbei C . Începem cu un punct P , construim un arc ce-l conține, luăm pe acest arc un punct P' și construim un arc ce-l conține ș.a.m.d. Pentru a reuși ne trebuie parametrizarea naturală a curbei și curbura ei. Procedeul acesta de construcție este foarte incomod în practică. Există posibilități mai comode de a desena graficul curbei C .

De exemplu, putem încerca să explicităm (cel puțin un arc al curbei C) în forma

$$(6.4) \quad y = f(x), \quad x \in (a, b)$$

și să reprezentăm grafic acest arc prin metoda învățată în liceu. Explicităm apoi un alt arc al curbei C ș.a.m.d.

Dacă acest procedeu este greoi pentru că fie explicitarea este dificilă, fie trebuie să împărțim curba, pentru explicitare, în foarte multe arce, putem să trasăm graficul curbei plecând direct de la o parametrizare oarecare a ei de forma

$$(6.5) \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \quad \forall t \in I \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

În acest scop se studiază variația semnelor derivatelor x', y' și x'', y'' . Dar înainte de aceasta trebuie să ne ocupăm de

Asimptote pentru curbe plane

Fie $P(x(t), y(t))$ un punct pe curba C de ecuație (6.5).

Să presupunem că pentru $t \rightarrow t_0$ (t_0 finit sau $\pm\infty$), fie $x(t)$ fie $y(t)$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$. Vom spune că punctul P tinde către infinit pe curba C și arcul descris de P se va numi ramură infinită a curbei C . Este posibil ca acest arc să se apropie oricât de mult de o dreaptă d în sensul că $\lim_{t \rightarrow t_0} \text{dist}(P, d) = 0$. În acest caz se spune că dreapta d este asimptotă pentru curba C . Apar următoarele situații:

a) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ (finit) și $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. În această situație dreapta $x = x_0$ este asimptotă (verticală) pentru că distanța lui P la această dreaptă are limita zero pentru $t \rightarrow t_0$.

b) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$ (finit). Atunci dreapta de ecuație $y = y_0$ este asimptotă (orizontală) la curba C .

c) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. În această situație căutăm asimptote (oblice) de forma $y = mx + n$. Condiția de asimptotă,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{mx(t) - y(t) + n}{\pm\sqrt{1+m^2}} = 0, \text{ rescrisă în forma } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t)}{\pm\sqrt{1+m^2}} \left(m - \frac{y(t)}{x(t)} + \frac{n}{x(t)} \right) = 0, \text{ ne}$$

arată că în mod necesar, $m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$. Forma ecuației asimptotei ne conduce la

$$n = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - mx(t)).$$

Invers, dacă limitele care definesc m și n există și sunt finite, distanța de la $P(x(t), y(t))$ la dreapta $y = mx + n$ tinde la zero pentru $t \rightarrow t_0$, deci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă a curbei C .

Exemplu. Să se reprezinte grafic curba, numită foliul lui Descartes, de ecuație $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Încercăm să găsim o parametrizare a curbei prin intersecția ei cu dreapta $y = tx$ (Procedeu demn de reținut!). Înlocuind $y = tx$ în ecuația curbei, obținem

$$(6.6) \quad \begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observăm că pentru $t \rightarrow -1$, funcțiile x și y devin simultan infinite. Căutăm asimptote oblice. Avem $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ și $\lim_{t \rightarrow -1} (y(t) - mx(t)) = -a$. Așadar dreapta $x + y + a = 0$ este asimptotă oblică.

Primele derivate sunt $x'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, $y'(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$. Ele se

anulează pentru $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ și respectiv pentru $t = 0$ și $t = \sqrt[3]{2}$. Introducem aceste valori și semnele funcțiilor x', y' într-un tabel ca mai jos.

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$		
x'	+++++										0	-----	
y'	-----						0	++++	0	-----			
x	0	\nearrow	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$\frac{a}{2\sqrt[3]{2}}$	\searrow	\searrow	\searrow	0
y	0	\searrow	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	$a\sqrt[3]{4}$	\searrow	\searrow	0

Din acest tabel reiese graficul curbei C (pentru $a = \sqrt[3]{2}$).

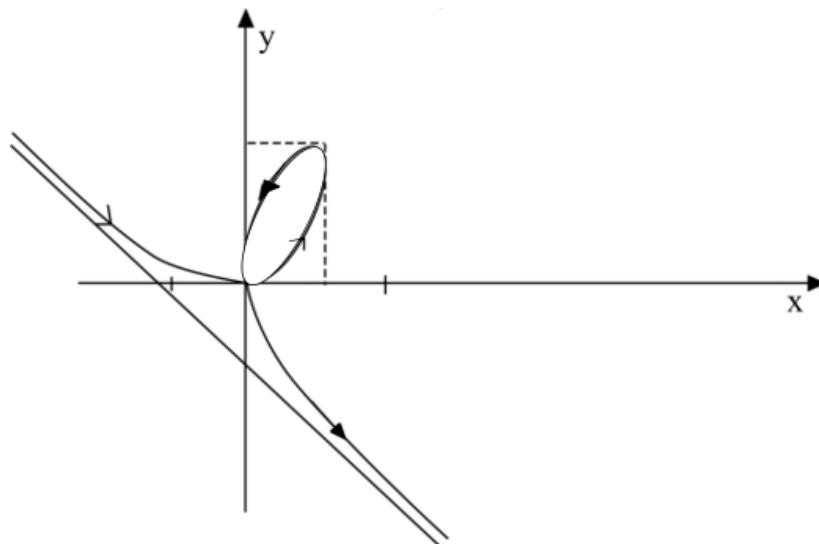


Fig. 5

Săgețile indică deplasarea punctului P al curbei când t variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Se constată imediat că axa Ox este tangentă la curbă în punctul O . Acesta este și punct dublu pentru curbă. El se obține pentru $t = 0, t = \pm\infty$. După schimbarea de parametru $t = \frac{1}{t}, t' \neq 0$, calculând primele derivate se constată că și axa Oy este tangentă curbei în originea O . Reprezentarea parametrică (6.6) ne arată că foliul lui Descartes este curbă în sensul Definiției 1.2.

Amintim că în reprezentările parametrică, (1.5), implicită, (1.6), și explicită, (1.7), ale curbelor plane se impuneau următoarele condiții:

- Funcțiile folosite să fie de clasă C^s ($s \geq 1$),
- În reprezentarea parametrică (1.5), derivatele x' și y' să nu fie simultan nule,
- În reprezentarea implicită (1.6), derivatele F_x și F_y să nu fie simultan nule.

Există mulțimi în plan descrise, într-un reper cartezian, de ecuații de tipul (1.5), (1.6), (1.7) care au puncte în care nu toate condițiile a), b), c) sunt satisfăcute. Asemenea puncte se numesc puncte singulare și mulțimile în cauză se numesc curbe cu singularități.

Lăsăm în seama Analizei matematice studiul curbelor cu singularități produse de nesatisfacerea condiției a) și ne ocupăm de puncte singulare date de nesatisfacerea condiției b), respectiv c).

Fie o curbă cu singularități dată parametric prin (1.5). Într-un punct singular avem $x' = y' = 0$. Constatăm că nu mai putem folosi (2.3) pentru a scrie ecuația

tangentei în acest punct. Amintim că într-un punct nesingular dat de $t = t_0$, panta

$$\text{panta tangentei la curbă este } m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}.$$

Această formulă conduce la ideea de a defini tangenta într-un punct singular după cum urmează. Să presupunem mai general că în punctul singular dat de valoarea $t = u_0$ avem

$$x' = x'' = \dots = x^{(s-1)} = y' = y'' = \dots = y^{(s-1)} = 0,$$

și că cel puțin una din derivatele $x^{(s)}, y^{(s)}$ este diferită de zero în acest punct.

Formula lui Taylor ne permite să scriem

$$x(u_0 + \Delta t) - x(u_0) = \frac{(\Delta t)^s}{s!} x^{(s)}(u_0 + \theta_1 \Delta t),$$

$$y(u_0 + \Delta t) - y(u_0) = \frac{(\Delta t)^s}{s!} y^{(s)}(u_0 + \theta_2 \Delta t),$$

unde θ_1 și θ_2 sunt numere reale din intervalul $(0,1)$.

Definind panta tangentei ca și în puncte nesingulare, rezultă $m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y^{(s)}(u_0 + \theta_1 \Delta t)}{x^{(s)}(u_0 + \theta_1 \Delta t)} = \frac{y^{(s)}(u_0)}{x^{(s)}(u_0)}$. Limita există pentru că funcțiile în cauză sunt de clasă C^s ($s \geq 1$).

Ecuația tangentei se scrie în forma

$$\frac{x - x(u_0)}{x^{(s)}(u_0)} = \frac{y - y(u_0)}{y^{(s)}(u_0)}.$$

Fie acum o curbă cu singularități dată de ecuația $F(x, y) = 0$. Coordonatele (x, y) ale unui punct singular sunt soluții ale sistemului

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0.$$

Căutăm panta tangentei într-un asemenea punct.

Fie $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punct vecin lui $P(x, y)$. Panta tangentei în P va

fi $m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Punctul P' fiind pe curbă, avem

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Aplicăm funcției F formula lui Taylor, oprindu-ne la termeni de ordin 2. Obținem

$$F_{xx}(x, y)(\Delta x)^2 + 2F_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + F_{yy}(x, y)(\Delta y)^2 = 0.$$

Împărțim prin $(\Delta x)^2$ și facem $\Delta x \rightarrow 0$. Rezultă

$$F_{xx}(x, y) + 2mF_{xy}(x, y) + F_{yy}(x, y)m^2 = 0.$$

Presupunem că cel puțin una din derivatele de ordinul al doilea a funcției F este diferită de zero în P . Ecuația de gradul 2 în m conduce la următoarea discuție.

- 1) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$ în P , avem două tangente în P , de pante m_1 și m_2 . Curba arată ca în Fig. 6.

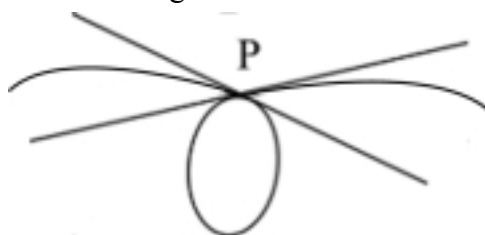


Fig. 6

- 2) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ în P , avem o singură tangentă care trebuie totuși socotită de două ori. Curba are una din formele

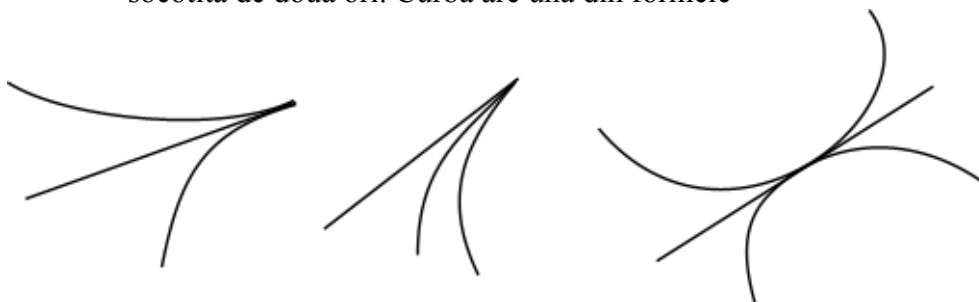


Fig. 7

- 3) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ în P , atunci P este un punct izolat al mulțimii de puncte definită de ecuația $F(x, y) = 0$, în sensul că există un disc centrat în P care nu conține nici un punct al acestei mulțimi.

Dacă toate derivatele de ordinul al doilea ale funcției F sunt nule în P , se face un raționament similar considerând în formula lui Taylor derivate de ordin ≥ 3 sau și mai mare dacă derivatele de ordinul al treilea etc. ale funcției F sunt nule în P .

CAPITOLUL 2

CURBE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN E^3

Rezumat. Se definește noțiunea de curbă în spațiu și se dau reprezentările analitice ale curbelor (1) explicită, 2) implicită, 3) vectorial parametrică):

1) $y = \varphi(x), z = \psi(x), x \in (a, b)$.

2) $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0, \text{rang} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2, (x, y, z) \in V \subseteq \mathbb{R}^3$,

3) $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}, \vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, funcțiile care apar fiind diferențiabile de clasă C^s cu $s \geq 3$. Se introduce parametrizarea naturală cu funcția lungime de arc

$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)} d\tau$. Se construiește triedrul tridreptunghic al lui

Frenet, format din planele osculator, normal și rectificator ale cărui muchii sunt tangenta, normala principală (conținută în planul osculator) și binormala (perpendiculară pe planul osculator). Cu versorii tangentei (\vec{t}) , al normalei principale (\vec{n}) și binormalei (\vec{b}) se definește reperul ortonormat (reper Frenet) $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ mobil pe curbă. Variația reperului

Frenet este descrisă de formulele lui Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds} = k(s)\vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} = -k(s)\vec{t} + \tau(s)\vec{b},$

$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)\vec{n}$, în care apar funcția de curbura k și de torsiune τ . Într-o parametrizare

oarecare $k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}, \tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))^2}$ și avem $\tau \equiv 0$ dacă și

numai dacă curba este plană. Se dau interpretări geometrice ale curburii și torsiunii și se enunță teorema fundamentală care afirmă că date două funcții $k, \tau: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow k(s), s \rightarrow \tau(s)$ continue, există o infinitate de curbe pentru care s este lungimea de arc, funcția k este curbura și funcția τ este torsiune. Oricare două dintre ele se pot suprapune printr-o deplasare în spațiu.

§1. Definiția curbelor în spațiul euclidian E^3

Intuitiv recunoaștem cu ușurință figurile numite curbe din spațiul fizic obișnuit și realizăm că unele sunt simple, de exemplu liniile unui curcubeu și altele sunt mai complicate, cum este zigzagul unui fulger puternic. Pentru a studia aceste figuri, trebuie să le abstractizăm și folosind structura abstractă a spațiului, anume

aceea de spațiu euclidian cu trei dimensiuni, să le exprimăm analitic, în formule cu care să putem face calcule.

Experiența de la studiul curbelor plane ne spune că trebuie să fixăm în E^3 un reper ortonormat $\mathfrak{R} = \{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ orientat pozitiv și să considerăm aplicații de tipul aplicației $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ cu I interval deschis în \mathbb{R} . Aplicației c i se asociază aplicația vectorială $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ unde funcțiile reale $t \rightarrow x(t), t \rightarrow y(t), t \rightarrow z(t)$ sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{Oc(t)}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ adică

$$(1.1) \quad \overrightarrow{Oc(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

sau, echivalent, coordonatele punctului $c(t) \in E^3$ în reperul \mathfrak{R} .

Presupunem că aplicația c este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) pe I ceea ce înseamnă că funcțiile coordonate $t \rightarrow x(t), t \rightarrow y(t), t \rightarrow z(t)$ sunt de clasă C^s ($s \geq 1$) pe I .

Matricea Jacobiană a aplicației c este $J_c = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, unde $x' = \frac{dx}{dt}, \dots$ și rezultă

că c este imersie pe I dacă și numai dacă

$$(1.2) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0 \text{ pe } I.$$

Această condiție este echivalentă cu

$$(1.2') \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0} \text{ pe } I.$$

Reamintim că imersia c este scufundare dacă aplicația vectorială $\vec{r}: I \rightarrow \vec{r}(I)$ este homeomorfism.

Definiția 1.1. O submulțime C în E^3 se numește **arc elementar de curbă** dacă $C = c(I)$, cu I un interval deschis în \mathbb{R} sau egal cu \mathbb{R} și aplicația c o scufundare diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) a lui I în E^3 . Perechea (I, c) se numește parametrizare a arcului elementar de curbă C .

Fie J un alt interval deschis în \mathbb{R} și $h: J \rightarrow I$, $\tau \rightarrow h(\tau) = t$ un difeomorfism de clasă C^s ($s \geq 1$), adică $\frac{dh}{d\tau} \neq 0 \forall \tau \in J$.

Propoziția 1.1. Perechea $(J, \tilde{c} = c \circ h)$ este o nouă parametrizare a arcului elementar de curbă C .

Demonstrație. J este interval deschis prin ipoteză și $\tilde{c}(J) = c(h(J)) = c(I) = C$. Fie $\vec{\rho} = \vec{r} \circ h$ aplicația vectorială asociată aplicației \tilde{c} . Prin derivare în raport cu τ a egalității $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(h(\tau))$, $\tau \in J$ obținem $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \vec{r}'(h(\tau)) \frac{dh}{d\tau} \neq 0$ pe J deci aplicația \tilde{c} este imersie. Ea este și scufundare pentru că $\vec{\rho}$ este compunerea a două homeomorfisme. ■

Noțiunea de arc elementar de curbă corespunde imaginii intuitive de “porțiune de curbă” sau “arc de curbă”. Intuiția ne spune că o curbă în spațiu este o reuniune de arce, unele dintre ele cu intersecție nevidă. Acest fapt intuitiv este formalizat în

Definiția 1.2. O submulțime \mathbb{C} în E^3 se numește **curbă** dacă orice punct al ei aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în \mathbb{C} .

Această definiție nu acoperă complet noțiunea intuitivă de curbă în spațiu dar circumscrie o clasă foarte largă de curbe întâlnite în practică, curbe care au proprietăți frumoase, deduse prin studiu analitic.

În capitolul de față ne vom ocupa de această noțiune de curbă în spațiu.

§2. Reprezentări analitice ale curbelor în spațiul euclidian E^3 .

După cum am văzut în §1, un arc elementar de curbă în spațiu este dat analitic prin aplicațiile c sau \vec{r} , cu anume proprietăți. Ne punem problema de a da, de a reprezenta (de a descrie) analitic o curbă în sensul Definiției 1.2.

Teorema 2.1. Mulțimea $\mathbb{C} = \{P(x, y, z) \in E^3 \mid y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \text{ cu } x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \text{ și funcțiile } \varphi, \psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferențiabile de clasă } C^s (s \geq 1)\}$ este o curbă în E^3 .

Demonstrație. Vom arăta că \mathbb{C} este chiar un arc elementar de curbă în E^3 . În acest scop definim $c : (a, b) \rightarrow E^3$ prin $c(x) = P(x, \varphi(x), \psi(x))$ cu aplicația vectorială asociată $\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \rightarrow (x, \varphi(x), \psi(x))$. Este evident că $c((a, b)) = \mathbb{C}$. Cum $\vec{r}'(x) = (1, \varphi'(x), \psi'(x))$ este o funcție vectorială care nu se anulează nicăieri pe (a, b) , aplicația c este imersie pe (a, b) . Aplicația $\vec{r} : (a, b) \rightarrow \vec{r}((a, b))$ este homeomorfism pentru că inversa ei $(x, \varphi(x), \psi(x)) \rightarrow x$ este evident continuă (chiar diferențiabilă de clasă C^∞). ■

Teorema 2.1 ne arată că putem reprezenta o curbă în spațiu prin ecuațiile

$$(2.1) \quad \begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x), \quad x \in (a, b). \end{cases}$$

Această reprezentare se numește reprezentare *explicită* pentru o curbă în E^3 , în fapt, pentru un arc elementar de curbă în E^3 .

În mod asemănător se arată că și următoarele ecuații

$$(2.1') \quad \begin{cases} x = \varphi(y) \\ z = \psi(y), \quad y \in (c, d), \end{cases}$$

$$(2.1'') \quad \begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z), \quad z \in (e, f), \end{cases}$$

reprezintă arce elementare de curbă în E^3 . Si acestea se numesc reprezentări explicite ale unui arc elementar de curbă în E^3 .

Pentru a găsi o altă reprezentare analitică a unei curbe în E^3 vom demonstra

Teorema 2.2. Mulțimea $\mathbb{C} = \{P(\vec{r}) \in E^3 \mid \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b) \text{ cu aplicația vectorială } t \rightarrow \vec{r}(t) \text{ diferențiabilă de clasă } C^s (s \geq 1) \text{ și cu } \vec{r}'(t) \neq \vec{0} \text{ pe } (a, b)\}$ este o curbă în E^3 .

Demonstrație. Vom demonstra că orice punct din \mathbb{C} aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în \mathbb{C} . Fie $P_0(\vec{r}_0)$ cu $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), t_0 \in (a, b)$ un punct din \mathbb{C} . Așadar avem $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq 0$. Să presupunem $x'(t_0) \neq 0$. Rezultă, din continuitate, că $x'(t) \neq 0$ pe un interval deschis $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0$. Pe acest interval funcția $x: t \rightarrow x(t)$ este strict monotonă deci injectivă și cum pe imagine este surjectivă, avem o bijecție $x: I \rightarrow J = x(I)$ cu inversa $x^{-1}: J \rightarrow I, x \rightarrow t = h(x)$, diferențiabilă de clasă $C^s (s \geq 1)$ pentru că funcția $t \rightarrow x(t)$ este diferențiabilă de clasă $C^s (s \geq 1)$. Înlocuim $t = h(x)$ în ecuațiile $y = y(t)$ și $z = z(t)$ și obținem $y = \varphi(x), z = \psi(x), x \in J$ și $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ funcții diferențiabile de clasă $C^s (s \geq 1)$, pentru că sunt compuneri de funcții diferențiabile de clasă $C^s (s \geq 1)$. După Teorema 1.1, mulțimea $\{P(x, \varphi(x), \psi(x)), x \in J\}$ este un arc elementar de curbă. Acesta conține punctul P_0 , care se obține pentru $x_0 = x(t_0)$ și este conținut în \mathbb{C} pentru că este aceea submulțime din \mathbb{C} obținută pentru $t = h(x)$ cu $x \in J$, adică pentru $t \in I \subset (a, b)$.

Dacă $x'(t_0)=0$, atunci fie $y'(t_0)\neq 0$, fie $z'(t_0)\neq 0$. Se face un raționament asemănător și se obține că P_0 aparține unui arc elementar reprezentat prin (2.1') sau (2.1''). ■

Teorema 2.2 ne permite să afirmăm că ecuația

$$(2.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in (a, b),$$

reprezintă analitic o curbă în spațiul E^3 . Această ecuație se numește reprezentarea *vectorial – parametrică* a unei curbe în E^3 . Ea are forma echivalentă

$$(2.2') \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in (a, b), \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0 \text{ pe } (a, b), \end{cases}$$

care se numește reprezentarea *parametrică* a unei curbe în E^3 .

Este evident că dacă restrângem intervalul de variație a lui t la un subinterval deschis I al lui (a, b) pe care aplicația $t \rightarrow \vec{r}(t)$ să fie homeomorfism pe imagine, ecuația (2.2) respectiv (2.2') va reprezenta un arc elementar de curbă în E^3 .

Există și o a treia reprezentare analitică a unei curbe în E^3 dată de

$$\textbf{Teorema 2.3.} \quad \text{Mulțimea} \quad \mathbb{C} = \left\{ P(x, y, z) \in E^3 \mid \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad \text{cu} \right.$$

$F, G: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D mulțime deschisă, diferențiabile de clasă C^s ($s \geq 1$) și $\text{rang} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$ pe D $\left. \vphantom{\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}} \right\}$, presupusă nevidă, este o curbă în E^3 .

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din \mathbb{C} aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în \mathbb{C} . Fie $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{C}$, deci

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}_{P_0} = 2. \text{ Amintim că } F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ etc. Să presupunem că } \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Din continuitate rezultă că acest determinant este diferit de zero pe o mulțime deschisă $D' \subset D$, centrată în P_0 , care, după o eventuală micșorare, poate fi luată de forma $D' = I \times J \times K$, unde I, J, K sunt intervale deschise centrate în x_0, y_0, z_0 , respectiv. Teorema funcțiilor implicite ne asigură că există funcțiile diferențiabile de clasă C^s , unice, $\varphi: I \rightarrow J$ și $\psi: I \rightarrow K$ încât $y_0 = \varphi(x_0)$, $z_0 = \psi(x_0)$ și

$$(*) \quad F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \quad G(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in I.$$

Considerăm mulțimea $C = \{P(x, \varphi(x), \psi(x)) \in E^3 | x \in I\}$. Conform Teoremei 1.1, aceasta este un arc elementar de curbă. Acest arc conține punctul P_0 care se obține pentru $x = x_0$ și este inclus în \mathbb{C} datorită identităților (*). Dacă $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0} = 0$, există un alt determinant de ordin 2 din matricea $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ care să fie diferit de zero în P_0 și se face un raționament asemănător. Se va obține că P_0 aparține unui arc elementar de curbă reprezentat ca în (1.2') sau în (1.2''). ■

Pe baza Teoremei 2.3 putem spune că sistemul de ecuații

$$(2.3) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D, \end{cases}$$

cu condiția $\text{rang} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$ pe D , dacă are cel puțin o soluție, reprezintă analitic o curbă în E^3 . Această reprezentare se numește reprezentare *implicită* a unei curbe în E^3 .

Funcțiile care intervin în reprezentările analitice (1.2) – (1.3) sunt diferențiabile de clasă C^s ($s \geq 1$). În continuare acest lucru va fi subînțeles iar clasa de diferențiabilitate va fi cea de care avem nevoie în calcule. De cele mai multe ori $s = 3$ este suficient.

Cele trei reprezentări ale unei curbe în spațiu – explicită, parametrică, implicită – sunt *local* echivalente în sensul că pentru orice punct P_0 de pe o curbă \mathbb{C} există un arc elementar ce conține P_0 și este conținut în \mathbb{C} , care se poate reprezenta în toate cele trei moduri posibile. În demonstrațiile teoremelor 2.2 și 2.3 am văzut cum se trece de la reprezentarea parametrică respectiv implicită la reprezentarea explicită. Invers, reprezentarea explicită (2.1) este o reprezentare parametrică de forma $x = t$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, $t \in (a, b)$ și totodată o reprezentare

$$\text{implicită particulară și anume} \quad \begin{cases} F(x, y, z) \equiv y - \varphi(x) = 0, \\ G(x, y, z) \equiv z - \psi(x) = 0. \end{cases}$$

Echivalența locală a celor trei reprezentări analitice creează multe avantaje în studiul *local* al curbelor în spațiu, studiu care urmărește stabilirea unor proprietăți referitoare la arce elementare de curbe în spațiu.

§3. Tangentă și plan normal într-un punct al unei curbe în spațiu

Noțiunile din titlul acestui paragraf sunt locale încât putem să ne limităm la a considera un arc elementar de curbă ce conține punctul în care dorim să definim tangenta și planul normal, care să admită simultan cele trei reprezentări analitice descrise în §2.

Vom nota un astfel de arc elementar prin C și-l vom numi simplu curbă în spațiu. Vom presupune că funcțiile cu care se reprezintă C sunt diferențiabile de clasă C^s cu s cât de mare va fi necesar.

Fie pentru început curba C reprezentată parametric prin

$$(3.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Considerații de Mecanică, precum și situația de la curbe în plan ne conduc la

Definiția 3.1. Se numește tangentă la curba C din spațiu în punctul ei $P_0(\vec{r}(t_0))$, dreapta care trece prin P_0 și are direcția vectorului $\vec{r}'(t_0)$.

Observație. Tangenta nu depinde de reperul ales în E^3 pentru că este definită de vectorul \vec{r}' care rămâne neschimbat la trecerea de la originea O la un alt punct O' , situație în care vectorii de poziție ai punctelor curbei devin $\overrightarrow{O'O} + \vec{r}(t)$ cu vectorul $\overrightarrow{O'O}$ independent de t . Tangenta nu depinde nici de parametrizarea curbei. Intr-adevăr, dacă $\varphi: J \rightarrow I = (a, b)$ este o schimbare de parametri, $t = \varphi(\tau)$ și punem $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$, vectorul $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}(\tau_0) = \vec{r}'(t_0) \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_0), t_0 = \varphi(\tau_0)$ este coliniar cu $\vec{r}'(t_0)$. Vectorii $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}(\tau_0)$ și $\vec{r}'(t_0)$, având aceeași direcție, vor determina aceeași dreaptă prin punctul $P_0(\vec{r}(t_0) = \vec{\rho}(\tau_0))$. Se spune că noțiunea de tangentă este geometrică.

Ecuția vectorial - parametrică a tangentei la curba C reprezentată de (2.1), în punctul $P_0(\vec{r}(t_0))$ este

$$(3.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pe componente (3.2) se scrie în forma

$$(3.3') \quad \begin{cases} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0), \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \\ z = z(t_0) + \lambda z'(t_0), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

sau echivalent,

$$(3.3'') \quad \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Dacă arcul C este reprezentat în forma implicită

$$(3.4) \quad y = \varphi(x), z = \psi(x), x \in (c, d),$$

ecuațiile tangentei în $P_0(x_0, \varphi(x_0), \psi(x_0))$ rezultă din (3.3'') (cu parametrul $t = x$) în forma

$$(3.5) \quad \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \frac{z-\psi(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Fie arcul C reprezentat în forma implicită

$$(3.6) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in D \text{ multime deschisă în } \mathbb{R}^3.$$

Fie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pe acest arc. Considerând simultan și reprezentarea sa (3.1) în forma scalară, avem

$$(3.7) \quad \begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \\ G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \end{cases} t \in I \text{ deschis în } \mathbb{R}.$$

Presupunem că P_0 se obține, în reprezentarea (3.1), pentru $t = t_0$. Derivăm fiecare din identitățile (3.7) în raport cu t . Obținem

$$(3.7') \quad \begin{cases} F_x \cdot x' + F_y \cdot y' + F_z \cdot z' \equiv 0, \\ G_x \cdot x' + G_y \cdot y' + G_z \cdot z' \equiv 0, \end{cases} \text{ pe } I.$$

Amintim că vectorul $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ se numește gradientul funcției F și se notează $\text{grad}F = (F_x, F_y, F_z)$. Similar avem $\text{grad}G = (G_x, G_y, G_z)$. Identitățile (3.7') se transcriu în forma

$$(3.7'') \quad \langle \vec{r}'(t), \text{grad}F \rangle = 0, \langle \vec{r}'(t), \text{grad}G \rangle = 0, t \in I.$$

De aici rezultă că $\vec{r}'(t_0)$ este perpendicular pe vectorii $\text{grad}_0 F$ și $\text{grad}_0 G$, unde indicele zero semnifică considerarea acestor vectori în $P_0(x_0, y_0, z_0)$, deci este coliniar cu produsul lor vectorial. Așadar avem $\vec{r}'(t_0) = \lambda \text{grad}_0 F \times \text{grad}_0 G$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un factor de proporționalitate. Vectorii $\text{grad}_0 F$ și $\text{grad}_0 G$ sunt

necoliniari deoarece $\text{rang} \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}_0 = 2$.

Folosim forma obținută pentru $\vec{r}'(t_0)$ în formula (3.7'') și ținem seama de formula de calcul a produsului vectorial a doi vectori. Obținem ecuațiile tangentei la curba C , dată implicit, în punctul ei $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(3.8) \quad \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0}.$$

Definiția 3.2. Se numește plan normal la curba C în punctul ei P_0 , planul care trece prin P_0 și este perpendicular pe tangenta la curba C în P_0 .

În cazul reprezentării parametrice (3.1), ecuația planului normal la curba C în $P_0(t_0)$ este

$$(3.9) \quad \langle \vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0) \rangle = 0$$

sau, în coordonate,

$$(3.9') \quad (x-x(t_0))x'(t_0) + (y-y(t_0))y'(t_0) + (z-z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

Pentru reprezentarea explicită (3.4) a curbei C , ecuația planului normal la C în $P_0(x_0, \varphi(x_0), \psi(x_0))$, are forma

$$(3.10) \quad x-x_0 + (y-\varphi(x_0))\varphi'(x_0) + (z-\psi(x_0))\psi'(x_0) = 0.$$

Dacă arcul de curbă C este dat în forma implicită (3.6), din ecuațiile (3.8) ale tangentei la curba C se deduce că ecuația planului normal în $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este dată de

$$(3.11) \quad (x-x_0) \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0 + (y-y_0) \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0 + (z-z_0) \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0 = 0$$

sau echivalent,

$$(3.11') \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x^0 & F_y^0 & F_z^0 \\ G_x^0 & G_y^0 & G_z^0 \end{vmatrix} = 0,$$

unde indicele zero indică evaluarea în punctul P_0 a derivatelor parțiale în cauză.

§4. Lungimea unui arc de curbă în spațiu. Parametrizații naturale.

Fie un arc de curbă în spațiu, nu neapărat elementar, reprezentat în forma parametrică

$$(4.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b].$$

Funcția vectorială $t \rightarrow \vec{r}(t)$ este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) pe $[a, b]$ în sensul că admite o extensiune diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) pe un interval deschis ce conține $[a, b]$.

Notăm $A(\vec{r}(a))$ și $B(\vec{r}(b))$ și vom vorbi de arcul parametrizat \widehat{AB} . Noțiunea de lungime de arc se obține ca și la curbe în plan.

Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Punctele $A(\vec{r}(a)), A_1(\vec{r}(t_1)), \dots, A_n(\vec{r}(t_n)) \equiv B$ determină o linie poligonală înscrisă în arcul parametrizat \widehat{AB} . Lungimea acestei linii poligonale este dată de

$$(4.2) \quad l_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|.$$

Din inegalitatea triunghiulară rezultă că înlocuind Δ cu o diviziune mai fină Δ' , avem $l_{\Delta} \leq l_{\Delta'}$. Cum nu putem decide dacă lungimile l_{Δ} cresc oricât sau nu depășesc un număr finit, odată cu rafinarea diviziunilor, notăm prin D mulțimea tuturor diviziunilor lui $[a, b]$ și introducem

Definiția 4.1. Se spune că arcul parametrizat \widehat{AB} are **lungime** sau că este **rectificabil** dacă mulțimea $\{l_{\Delta}, \Delta \in D\}$ este mărginită superior. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea arcului parametrizat \widehat{AB} .

Formula (4.2) ne arată că arcul parametrizat \widehat{AB} este rectificabil dacă și numai dacă funcția $t \rightarrow \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Din inegalitățile duble

$$(4.3) \quad \left. \begin{array}{l} |x| \\ |y| \\ |z| \end{array} \right\} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x| + |y| + |z|,$$

rezultă că funcția $t \rightarrow \vec{r}(t)$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$ dacă și numai dacă funcțiile coordonate $t \rightarrow x(t), t \rightarrow y(t), t \rightarrow z(t)$ sunt cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Dacă funcția $t \rightarrow \vec{r}(t)$ este de clasă C^1 pe $[a, b]$, prin folosirea teoremei creșterilor finite, lungimea l_Δ se poate scrie în forma

$$(4.4) \quad l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\mu_i) + z'^2(\eta_i)} (t_{i+1} - t_i),$$

unde $\xi_i, \mu_i, \eta_i \in (t_i, t_{i+1})$.

Dacă numerele ξ_i, μ_i, η_i ar coincide, l_Δ ar fi sumă Riemann pentru funcția $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ și am obține $l_{AB} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$. În general, numerele ξ_i, μ_i, η_i nu coincid. Se poate totuși arăta ([13]) că are loc

Teorema 4.1. Fie un arc de curbă parametrizată \widehat{AB} reprezentat de (4.1) cu funcții $t \rightarrow \vec{r}(t)$ de clasă C^1 . Asemenea arc este rectificabil și avem

$$(4.5) \quad l_{AB} = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Arătăm acum că lungimea arcului \widehat{AB} nu depinde de parametrizarea aleasă. Într-adevăr, fie $t = \varphi(\tau)$ cu $\tau \in [c, d]$ și $\varphi'(\tau) \neq 0$ pe $[c, d]$ o schimbare de parametru pe arcul \widehat{AB} .

Reprezentarea (4.1) trece în forma $\vec{c}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$, $\tau \in [c, d]$ și în conformitate cu (4.5) avem $l'_{AB} = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{c}}{d\tau} \right\| d\tau$, unde prin accent am indicat lungimea lui \widehat{AB} în noua parametrizare. Dacă $\varphi'(\tau) > 0$ pe $[c, d]$, avem $l'_{AB} = \int_c^d \|\vec{r}'(\varphi(\tau))\| \varphi'(\tau) d\tau$. În această integrală facem schimbarea de variabilă $\varphi(\tau) = t$. Cum $dt = \varphi'(\tau) d\tau$ și $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ rezultă

$$l'_{AB} = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = l_{AB}.$$

În cazul în care $\varphi'(\tau) < 0$ pe $[c, d]$, avem $\varphi(c) = b$ și $\varphi(d) = a$ și cu aceeași schimbare de variabilă în integrală obținem

$$l'_{AB} = - \int_c^d \|\vec{r}'(\varphi(\tau))\| \varphi'(\tau) d\tau = \int_d^c \|\vec{r}'(\varphi(\tau))\| \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = l_{AB}.$$

Vom spune că (4.5) este formula de calcul pentru lungimea (când există!) unui arc de curbă.

Fie funcția $t \rightarrow s(t)$ dată prin

$$(4.6) \quad s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(\sigma)\| d\sigma, \quad a \leq t \leq b.$$

Derivata acestei funcții este $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$. Așadar ea este strict crescătoare pe $[a, b]$. Rezultă că este bijecție de la $[a, b]$ la $[0, L]$, unde $L := l_{\widehat{AB}}$. Inversa ei, $t = h(s)$ este de aceeași clasă de diferențiabilitate cu funcția s . Efectuăm o schimbare de parametru pe arcul \widehat{AB} dată de $t = h(s)$, posibilă pentru că $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(h(s))\|}$, din formula de derivare a inversei unei funcții.

În această nouă parametrizare, reprezentarea (4.1) devine

$$(4.7) \quad \vec{c}(s) = \vec{r}(h(s)), \quad s \in [0, L].$$

Prin derivare în raport cu s în (4.7) obținem $\frac{d\vec{c}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}(h(s)) \frac{dh}{ds}$ și

considerând lungimile acestor vectori avem $\left\| \frac{d\vec{c}}{ds} \right\| = \|\vec{r}'(h(s))\| \left| \frac{dh}{ds} \right| = 1$. Așadar am obținut

Teorema 4.2. *Parametrizare prin lungimea de arc s are proprietatea că lungimea vectorului tangent este constantă, egală cu 1.*

O parametrizare a curbei cu proprietatea că în acea parametrizare lungimea vectorului tangent curbei este constantă, egală cu 1, se numește **parametrizare naturală** sau **parametrizare canonică**.

Teorema 4.2 ne spune că funcția lungime de arc dă o parametrizare naturală a curbei sau că arcul s pe curbă este un parametru natural. În această parametrizare, pentru arcul de capete $P_0(s_0)$ și $P_1(s_1)$ cu $s_0 < s_1$ avem $l_{\widehat{P_0P_1}} = \int_{s_0}^{s_1} \|\vec{c}'(\sigma)\| d\sigma = \int_{s_0}^{s_1} d\sigma = s_1 - s_0$. Această relație ne permite să gândim s ca abscisă curbilinie a unui punct de pe arcul \widehat{AB} .

Este natural să ne întrebăm dacă mai există și alte parametrizări naturale în afara celei date de lungimea de arc. Fie $\vec{r} = \vec{r}(s)$ cu $\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$. Să efectuăm o

schimbare de parametru $s = h(\sigma)$ și să presupunem că $\left\| \frac{d\vec{c}(\sigma)}{d\sigma} \right\| = 1$, unde

$$\vec{c}(\sigma) = \vec{r}(h(\sigma)).$$

Dacă trecem la lungimi în egalitatea vectorială $\frac{d\vec{c}}{d\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{dh}{d\sigma}$

obținem $\frac{dh}{d\sigma} = \pm 1$ și deci

$$(4.8) \quad \sigma = \pm s + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Așadar parametrizările naturale pe curbă sunt cele din (4.8). Ele sunt în esență date de lungimea de arc s .

§5. Planul osculator într-un punct neinflexionar al unei curbe în spațiu.

Fie o curbă C în spațiu reprezentată parametric în forma

$$(5.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in (a, b),$$

prin funcții diferențiabile de clasă $C^k, k \geq 3$.

Am văzut mai sus că vectorul $\vec{r}'(t_0)$ dă direcția tangentei la curba C în punctul $P_0(t_0)$. Considerăm și vectorul $\vec{r}''(t_0)$. Acesta poate fi coliniar cu $\vec{r}'(t_0)$, situație în care se spune că P_0 este punct *inflexionar* al curbei C sau poate fi necoliniar cu $\vec{r}'(t_0)$, adică $\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$, caz în care P_0 se numește punct *neinflexionar* al curbei C .

Un punct neinflexionar $P_0(t_0) \in C$ și vectorii $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ determină un plan numit prin tradiție *plan osculator* la curba C în P_0 . Direcția normală a acestui plan este direcția vectorului $\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)$. Așadar introducem

Definiția 5.1. Se numește *plan osculator la curba C într-un punct $P_0(\vec{r}(t_0)) \in C$, neinflexionar, planul care trece prin P_0 și are ca direcție normală direcția vectorului $\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$.*

Această definiție ne permite o serie de

Observații:

1. Planele care conțin tangenta la curba C prin $P_0 \in C$ se numesc plane tangente. Ele formează un fascicol. Într-un punct $P_0 \in C$, neinflexionar, putem alege unul dintre planele tangente cu ajutorul lui \vec{r}'' : planul osculator în P_0 . Dacă P_0 este punct inflexionar, o asemenea alegere nu mai este posibilă. Putem lua ca plan osculator oricare dintre planele tangente. Așadar, în puncte inflexionare, planul osculator nu este unic determinat.

2. Planul osculator este strict legat de curbă. El nu depinde de reperul ales în spațiu pentru că este definit de P_0 , de \vec{r}' și \vec{r}'' , elemente care nu depind de reper. Acest plan nu depinde nici de parametrizarea aleasă pe curbă. Într-adevăr, fie $\vec{c}(\tau) = \vec{r}(h(\tau))$ după o schimbare de parametru $t = h(\tau), h'(\tau) \neq 0$. Punctul $P_0 \in C$ rămâne același numai că se obține pentru valoarea τ_0 soluție unică a ecuației

$t_0 = h(\tau)$. Pe de altă parte avem $\frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0) = \vec{r}'(t_0) \frac{dh}{d\tau}(\tau_0)$, și

$\frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2} = \vec{r}''(t_0) \left(\frac{dh}{d\tau}(\tau_0) \right)^2 + \vec{r}'(t_0) \frac{d^2h}{d\tau^2}(\tau_0)$ și prin înmulțire vectorială rezultă că

vectorul $\frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0) \times \frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}(\tau_0)$ dat de

$$(5.2) \quad \frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0) \times \frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}(\tau_0) = (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \left(\frac{dh}{d\tau}(\tau_0) \right)^3,$$

are aceeași direcție cu vectorul $\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)$.

3. Formula (5.2) ne spune că un punct inflexionar într-o parametrizare este astfel în toate parametrizările. Spunem că noțiunea de punct inflexionar este noțiune geometrică pentru că nu depinde de reperul ales și nici de parametrizarea curbei. Evident că și noțiunea de plan osculator este geometrică, în același sens.

Definiția 5.1 ne spune că ecuația planului osculator se poate da în formele

$$(5.3) \quad \langle \vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0) \rangle = 0,$$

$$(5.3') \quad (\vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0,$$

$$(5.3'') \quad \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ z - z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Revenim la noțiunea de punct inflexionar. Aceasta se aplică și curbelor plane care evident pot fi gândite drept curbe în spațiu, situate într-un plan care se poate lua de ecuație $z = 0$, la o alegere convenabilă a reperului în spațiu. Curba

plană are atunci reprezentarea explicită $\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0, x \in (c, d) \end{cases}$ care se poate pune în

forma parametrică $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ z = 0, x \in (c, d) \end{cases}$.

Rezultă $\vec{r}' = (1, f', 0)$, $\vec{r}'' = (0, f'', 0)$ și $(\vec{r}' \times \vec{r}'')(x) = f''(x) \vec{k}$ de unde conchidem că pentru o curbă din planul xOy de ecuație $y = f(x)$, punctele inflexionare sunt date de soluțiile ecuației $f''(x) = 0$. Așadar, pentru curbe plane noțiunea de punct inflexionar se reduce la aceea întâlnită încă din liceu la studiul variației funcțiilor reale de variabilă reală.

Fie în particular o dreaptă în spațiu de ecuație

$$(5.4) \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cum $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{u}$ și $\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = 0$, rezultă că toate punctele drepte sunt puncte inflexionare. Ne întrebăm dacă există și alte curbe care să aibă toate punctele inflexionare. Răspunsul este negativ pentru că are loc

Teorema 5.1. *O curbă în spațiu cu toate punctele inflexionare este un segment deschis de dreaptă sau o dreaptă.*

Demonstrație. Fie curba C în spațiu reprezentată parametric prin (5.1) cu toate punctele inflexionare, adică $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{0} \quad \forall t \in (a, b)$. Fie $\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$

versorul lui $\vec{r}'(t)$, adică $\vec{u}^2(t) = 1$. Putem deci scrie $\vec{r}'(t) = g(t)\vec{u}(t)$, cu $g(t) = \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$. Din ecuația $\vec{u}^2(t) = 1$ rezultă $\langle \vec{u}(t), \vec{u}'(t) \rangle = 0$, deci $\vec{u}'(t)$ este perpendicular pe $\vec{u}(t)$. Condiția $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{0}$ este echivalentă cu $g^2(t)\vec{u}(t) \times \vec{u}'(t) = \vec{0}$ care ne arată că $\vec{u}'(t)$ este coliniar cu $\vec{u}(t)$. Așadar $\vec{u}'(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$. Cu alte cuvinte $\vec{r}'(t)$ are direcție fixă. Prin integrarea ecuației vectoriale $\vec{r}'(t) = g(t)\vec{u}$ obținem $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{u} \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$. Așadar vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ al unui punct oarecare pe C verifică ecuația $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{u}$, cu $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ și $\lambda = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \in \mathbb{R}$, care este ecuația unei drepte. Rezultă că C este fie un segment deschis de dreaptă fie dreaptă în întregime. ■

§6. Reperul Frenet asociat unei curbe în spațiu

După cum am vazut mai sus, într-un punct neinflexionar P al unei curbe în spațiu avem două plane perpendiculare: planul osculator și planul normal. Ele sunt perpendiculare pentru că planul osculator conține tangenta care este o dreaptă perpendiculară pe planul normal. Cele două plane se intersectează după o dreaptă care, pentru că este conținută în planul normal și pentru a o distinge de o altă dreaptă din planul normal, se numește tradițional *normală principală*. Dreapta care trece prin P și este perpendiculară pe tangentă și pe normala principală în P se numește *binormală*. Evident că aceasta este conținută în planul normal prin P , plan care conține toate dreptele perpendiculare pe tangentă în P . Tangenta și cu binormala în P determină un plan numit *plan rectificator* care este evident perpendicular pe planul normal și pe planul tangent în P .

Așadar putem vorbi de un triedru tridreptunghic cu vârful în P numit triedrul lui Frenet (vezi Fig.8).

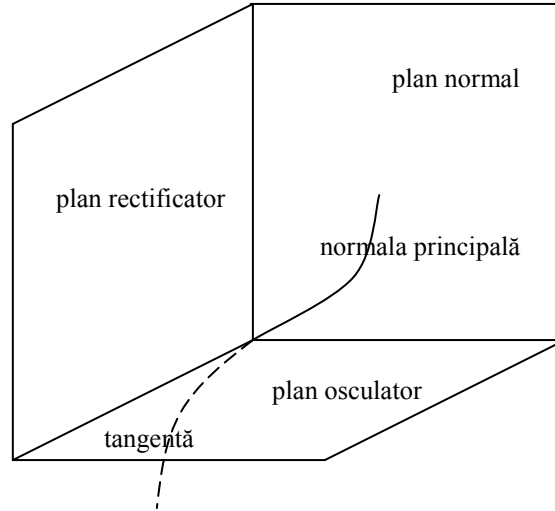


Fig. 8

Muchiile acestui triedru sunt: tangenta, normala principală și binormala iar fețele sale sunt: planul osculator, planul normal și planul rectificator.

Triedrul Frenet este intrinsec asociat curbei, adică nu depinde de reperul din spațiu și nici de parametrizarea de pe curbă. Aceste aspecte le-am verificat direct pentru tangenta și pentru planul osculator iar celelalte elemente ale triedrului Frenet au fost definite geometric, fără nici o referire la reperul ales în spațiu sau la parametrizarea curbei.

Să presupunem curba C reprezentată vectorial – parametric prin

$$(6.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ecuatiile tangentei, planului normal și planului osculator în $P_0(t_0) \equiv P_0(\vec{r}(t_0))$ au fost precizate anterior. Binormala, fiind perpendiculară pe planul osculator, are direcția dată de vectorul $\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)$. Deci ecuația ei este

$$(6.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(t_0) + \lambda (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Normala principală, ca perpendiculară pe tangenta și binormală, are direcția dată de vectorul $(\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \times \vec{r}'(t_0)$ și deci se poate reprezenta analitic prin ecuația

$$(6.3) \quad \vec{r} = \vec{r}(t_0) + \mu ((\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) \times \vec{r}'(t_0)), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ecuația planului rectificator se poate scrie ușor. Având în vedere că el trece prin P_0 și conține tangenta și binormala rezultă

$$(6.4) \quad (\vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) = 0.$$

Considerăm $P(t) \equiv P(\vec{r}(t))$ punct variabil pe curba C și introducem

- Versorul tangentei: $\vec{t} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|}$
- Versorul normalei principale: $\vec{n} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{\|(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'\|}$
- Versorul binormalei: $\vec{b} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}.$

Acești versori sunt ortogonali doi câte doi.

Definiția 6.1. Reperul $\{P, (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})\}$ se numește reperul Frenet asociat curbei C .

Observația 6.1. Reperul Frenet este un reper mobil pe curbă. El există în toate punctele neinflexionare ale curbei.

Observația 6.2. Versorii $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ verifică evident egalitățile

$$(6.5) \quad \vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}, \quad \vec{n} \times \vec{b} = \vec{t}, \quad \vec{b} \times \vec{t} = \vec{n}$$

(care se rețin prin ciclicitate)

$$(6.6) \quad (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = 1.$$

Egalitatea (6.6) ne spune că reperul Frenet este pozitiv (drept) orientat.

Studiem comportarea versorilor $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ la o schimbare de parametru pe curba C . Știm deja că direcțiile și lungimile lor nu depind de parametrizare. Rămâne să vedem ce se întâmplă cu sensul lor la o schimbare de parametru

$t = h(\tau)$, $\tau \in (c, d)$, $\frac{dh}{d\tau} \neq 0$ pe (c, d) . Fie $\vec{c}(\tau) = \vec{r}(h(\tau))$. Avem:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{c}}{d\tau} \right\| &= \|\vec{r}'\| \left\| \frac{dh}{d\tau} \right\|, \quad \left\| \frac{d\vec{c}}{d\tau} \times \frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2} \right\| = \|\vec{r}' \times \vec{r}''\| \left\| \frac{dh}{d\tau} \right\|^3 \\ \left\| \left(\frac{d\vec{c}}{d\tau} \times \frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2} \right) \times \frac{d\vec{c}}{d\tau} \right\| &= \|(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'\| \left\| \frac{dh}{d\tau} \right\|^4. \end{aligned}$$

Aceste egalități ne arată că dacă $\frac{dh}{d\tau} > 0$, adică schimbarea de parametru păstrează sensul de parcurs al arcului de curbă sau orientarea curbei, versorii \vec{t}, \vec{n} și

\vec{b} își păstrează sensul. În caz contrar, adică $\frac{dh}{d\tau} < 0$, versorii tangentei și binormalei își schimbă sensul iar cel al normalei principale rămâne același.

Schimbarea de sens a versorului tangentei este în acord cu interpretarea acestui versor ca versor al vectorului viteză al unui mobil ce se deplasează pe curba C . Fizica ne spune că sensul vectorului viteză este același cu sensul de deplasare a mobilului pe curba C .

Observația 6.3. Considerațiile tocmai încheiate ne arată că reperul Frenet rămâne pozitiv (drept) orientat indiferent de parametrizare de pe curbă.

Parametrizările naturale se dovedesc din nou importante.

Teorema 6.1. Într-o parametrizare naturală $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [0, L]$ $\left(\left\| \dot{\vec{r}}(s) \right\| = 1 \right)$, versorii reperului Frenet sunt dați de formulele

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \vec{t}(s) &= \dot{\vec{r}}(s), \\ \vec{n}(s) &= \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\|}, \\ \vec{b}(s) &= \frac{\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)}{\left\| \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s) \right\|}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Prima formulă este imediată pentru că $\left\| \dot{\vec{r}}(s) \right\| = 1$. Expresia lui \vec{b} este aceeași ca în orice altă parametrizare. Rămâne să stabilim forma lui $\vec{n}(s)$.

Din $\dot{\vec{r}}^2 = 1$ rezultă $\ddot{\vec{r}} \perp \dot{\vec{r}} = \vec{t}$. Cum $\ddot{\vec{r}} \perp \vec{b}$, rezultă că $\ddot{\vec{r}}$ este coliniar cu \vec{n} , adică $\vec{n} = \lambda \ddot{\vec{r}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Urmează că $\vec{n} = \pm \frac{\ddot{\vec{r}}}{\left\| \ddot{\vec{r}} \right\|}$. Semnul “ $-$ ” se elimină pentru că

bazele $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ și $\left(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \right)$ sunt pozitiv orientate, deci \vec{n} și $\ddot{\vec{r}}$ au și același sens. ■

§7. Formulele lui Frenet pentru o curbă în spațiu

Am subliniat mai sus că reperul Frenet $\mathfrak{R}_F = \{P(s), (\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))\}$ este mobil pe curba C de ecuație

$$(7.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(s), \quad s \in [0, L] \quad \text{cu} \quad \dot{\vec{r}}^2(s) = 1.$$

Variația acestui reper pe C este descrisă de variația vectorilor săi odată cu s , adică de vectorii $\dot{\vec{t}}(s), \dot{\vec{n}}(s), \dot{\vec{b}}(s)$. Acești vectori se pot determina prin componentele lor relative fie la reperul inițial, fie la însuși reperul Frenet \mathfrak{R}_F .

Ne vom ocupa de a doua exprimare pentru că este mai utilă și mai interesantă, adică vom exprima vectorii $\dot{\vec{t}}(s), \dot{\vec{n}}(s), \dot{\vec{b}}(s)$ în reperul \mathfrak{R}_F . Exprimarea în reperul inițial se obține prin simple derivări în formulele (6.8). De exemplu, $\dot{\vec{t}}(s) = \ddot{x}(s)\vec{i} + \ddot{y}(s)\vec{j} + \ddot{z}(s)\vec{k}$, etc.

Formula a doua din (6.8) se poate rescrie în forma $\dot{\vec{t}}(s) = \left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\| \vec{n}(s)$.

Notăm

$$(7.2) \quad k(s) = \left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\| \quad s \in [0, L]$$

și rezultă

$$(7.3) \quad \dot{\vec{t}}(s) = k(s) \vec{n}(s),$$

formulă care exprimă $\dot{\vec{t}}(s)$ în reperul \mathfrak{R}_F .

Din formula (7.2) rezultă $k(s) > 0 \quad \forall s \in [0, L]$.

Fie $\dot{\vec{b}} = p\vec{t} + q\vec{n} + r\vec{b}$, cu p, q, r funcții de s . Omitem s pentru simplificarea scrierii.

Proprietatea $\dot{\vec{b}}^2 = 1$ implică $\left\langle \vec{b}, \dot{\vec{b}} \right\rangle = 0$ care, la rândul ei, conduce la $r = 0$.

Din proprietatea $\left\langle \vec{b}, \vec{t} \right\rangle = 0$ rezultă $\left\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \right\rangle = 0$. Înlocuind aici expresiile lui $\dot{\vec{t}}$

și $\dot{\vec{b}}$ obținem $p = 0$. Așadar avem $\dot{\vec{b}} = q\vec{n}$, de unde $q = \left\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \right\rangle$. Introducem funcția

$$(7.4) \quad \tau(s) = -\left\langle \frac{\dot{\vec{b}}}{b}, \vec{n} \right\rangle, \quad s \in [0, L].$$

Cu această notație expresia lui $\frac{\dot{\vec{b}}}{b}$ devine

$$(7.5) \quad \frac{\dot{\vec{b}}}{b}(s) = -\tau(s)\vec{n}(s).$$

Vom proceda asemănător pentru a exprima $\frac{\dot{\vec{n}}}{n}$ în reperul \mathfrak{R}_F . Punem $\frac{\dot{\vec{n}}}{n} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}$, cu α, β, γ funcții necunoscute, urmând a fi determinate.

Egalitatea $\left\langle \vec{n}, \frac{\dot{\vec{n}}}{n} \right\rangle = 0$ ne dă imediat $\beta = 0$. Proprietatea $\left\langle \vec{n}, \vec{t} \right\rangle = 0$ conduce prin derivare la ecuația $\left\langle \frac{\dot{\vec{n}}}{n}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{\dot{\vec{t}}}{t} \right\rangle = 0$, care, pe baza ecuației (7.3), ne arată că $\alpha + k = 0$, deci $\alpha = -k$. Similar, din $\left\langle \vec{n}, \vec{b} \right\rangle = 0$ obținem $\left\langle \frac{\dot{\vec{n}}}{n}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{\dot{\vec{b}}}{b} \right\rangle = 0$, de unde, folosind (7.5), obținem $\gamma - \tau = 0$, adică $\gamma = \tau$. Așadar avem

$$(7.6) \quad \frac{\dot{\vec{n}}}{n}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s).$$

Strângem la un loc formulele (7.3), (7.5), (7.6), numite și formulele lui Frenet pentru curba C , într-o singură formulă:

$$(F) \quad \begin{cases} \frac{\dot{\vec{t}}}{t}(s) = k(s)\vec{n} \\ \frac{\dot{\vec{n}}}{n}(s) = -k(s)\vec{t} + \tau(s)\vec{b}(s) \\ \frac{\dot{\vec{b}}}{b}(s) = -\tau(s)\vec{n}(s), \quad s \in [0, L]. \end{cases}$$

Funcția $k: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow k(s)$ se numește *funcția curbura* a curbei C . Valoarea ei într-un punct $P \in C$ se numește *curbura* curbei C în punctul P . Observăm că funcția curbura este strict pozitivă.

Funcția $\tau: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, s \rightarrow \tau(s)$ se numește *funcția torsiune* a curbei. Valoarea ei într-un punct $P \in C$ se numește *torsiunea* curbei C în punctul P . Din (7.4) rezultă că această valoare poate fi pozitivă, negativă sau zero. Într-un punct fixat P al curbei, numerele $\frac{1}{k}$ și $\frac{1}{\tau}$, $\tau \neq 0$, se numesc *rază de curbura* și respectiv *rază de torsiune* în P .

Dacă introducem matricile formale $\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$ și $\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{bmatrix}$, formulele (F) ale

lui Frenet se pot scrie compact

$$(F') \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}.$$

Observăm că matricea pătratică ce apare în (F') este antisimetrică. Acest fapt este o consecință directă a faptului că reperul Frenet este ortonormat. (Exercițiu.!)

În încheierea acestui paragraf menționăm că, dacă introducem vectorul $\vec{d} = \tau \vec{t} + k \vec{b}$, numit și vectorul lui Darboux, situat în planul rectificator, formulele lui Frenet se pot scrie și în forma

$$(F'') \quad \dot{\vec{t}} = \vec{d} \times \vec{t}, \quad \dot{\vec{n}} = \vec{d} \times \vec{n}, \quad \dot{\vec{b}} = \vec{d} \times \vec{b}.$$

§8. Interpretări geometrice ale funcției curbură și funcției torsiune

Am asociat unei curbe în spațiu două funcții remarcabile k și τ . Ne interesează semnificații geometrice ale lor.

Prezența versorilor $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ sugerează următoarea construcție: desenăm versorii $\vec{t}(s)$ cu originea în O , originea reperului fixat în E^3 ; extremitățile lor vor descrie o curbă pe sfera de rază 1 cu centrul în O , numită *indicatoarea sferică a tangentelor* curbei C . Similar se obține *indicatoarea sferică a binormalelor* curbei C și respectiv *indicatoarea sferică a normalelor principale* ale curbei C .

Indicatoarea sferică a tangentelor se poate reprezenta prin ecuația

$$(8.1) \quad \vec{r} = \vec{t}(s), \quad s \in [0, L]$$

(s este parametru natural pe C dar nu și pe indicatoarea sferică a tangentelor!).

Fie ds diferențiala funcției lungime de arc. Ne amintim că $s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau$ într-o parametrizare oarecare și deci $ds = s'(t) dt = \|\vec{r}'(t)\| dt$.

Notăm prin ds_1 diferențiala funcției lungime de arc a indicatoarei sferice a tangentelor. Obținem $ds_1 = \frac{d\vec{t}}{ds}(s)ds = \left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\| ds = k(s)ds$, de unde

$$(8.2) \quad k(P) = \frac{ds_1}{ds}.$$

Există și o altă modalitate de a exprima (8.2). Fie $P(s)$ și $Q(s + \Delta s)$ două puncte “vecine” pe C . Atunci lungimea arcului \widehat{PQ} este $l(\widehat{PQ}) = \Delta s > 0$, suficient de mic. Fie punctele P' și Q' pe indicatoarea sferică a tangentelor corespunzătoare punctelor P și Q . Ele au vectorii de poziție $\vec{t}(s)$ respectiv $\vec{t}(s + \Delta s)$. După formula care dă lungimea unui arc de curbă, avem:

$$l(\widehat{P'Q'}) = \int_s^{s+\Delta s} \left\| \dot{\vec{t}}(\sigma) \right\| d\sigma = \int_s^{s+\Delta s} \left\| \ddot{\vec{r}}(\sigma) \right\| d\sigma = \int_s^{s+\Delta s} k(\sigma) d\sigma \approx k(\sigma_0) \Delta s,$$

după teorema de medie aplicată integralei în cauză, unde $\sigma_0 \in (s, s + \Delta s)$. Așadar,

rezultă $k(\sigma_0) = \frac{l(\widehat{P'Q'})}{l(\widehat{PQ})}$ și pentru $\Delta s \rightarrow 0$ obținem

$$(8.3) \quad k(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{l(\widehat{P'Q'})}{\Delta s}.$$

Formula a treia a lui Frenet ne arată că se vor obține interpretări similare pentru torsiune, înlocuind indicatoarea sferică a tangentelor cu indicatoarea sferică a binormalelor.

Într-adevăr, dacă notăm cu ds_2 diferențiala funcției lungime de arc a indicatoarei binormalelor, obținem

$$(8.4) \quad |\tau(P)| = \frac{ds_2}{ds},$$

$$(8.5) \quad |\tau(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{l(\widehat{P'Q'})}{\Delta s},$$

unde P' , Q' sunt punctele de pe indicatoarea sferică a binormalelor, corespunzătoare punctelor $P(s)$ și $Q(s + \Delta s)$ de pe C .

Continuăm să considerăm punctele “vecine” $P(s)$ și $Q(s + \Delta s)$ pe curba C . Notăm prin $\Delta\omega$ unghiul dintre vectorii $\vec{t}(s)$ și $\vec{t}(s + \Delta s)$. Are loc formula

$$(8.6) \quad k(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \right|.$$

Pentru demonstrație, observăm că dacă desenăm vectorii $\vec{t}(s)$ și $\vec{t}(s + \Delta s)$ cu originea în același punct, obținem un triunghi isoscel cu unghiul de la vârf $\Delta\omega$ și latura opusă de lungime $|\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)|$. Rezultă imediat că

$$2 \sin \frac{\Delta\omega}{2} = |\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)|. \text{ Împărțim ambii membrii ai acestei relații la } \Delta s \text{ și}$$

trecem la module (de numere reale). Obținem $\left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} \right| = \left\| \frac{\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s} \right\|$,

egalitate în care trecem la limită pentru $\Delta s \rightarrow 0$. Termenul din dreapta are limită pentru că am presupus curba C reprezentată prin funcții diferențiabile de orice clasă

C^k (aici este suficient să luăm $k \geq 2$) și limita sa este $\left\| \dot{\vec{t}}(s) \right\| = k(s)$. Așadar și

termenul din stânga are limită pentru $\Delta s \rightarrow 0$. Avem

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta\omega}{2}} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \right|, \text{ pentru că } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Rezultă (8.6).}$$

Fie acum $\Delta\psi$ unghiul vectorilor $\vec{b}(s)$ și $\vec{b}(s + \Delta s)$. În mod cu totul similar se arată că are loc următoarea interpretare geometrică a torsionii:

$$(8.7) \quad |\tau(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\psi}{\Delta s} \right|.$$

§9. Formule de calcul pentru curbura și torsione

Funcțiile curbura și torsione au fost introduse prin formulele lui Frenet, în parametrizare naturală. Această parametrizare este foarte utilă în rezolvarea unor probleme teoretice dar se obține greu sau chiar nu se poate explicita plecând de la o parametrizare oarecare a curbei. Încât avem nevoie de exprimări ale curburii și torsionii în parametrizări oarecare. Aceste exprimări se vor numi formule de calcul.

Amintim că am definit curbura prin

$$(9.1) \quad k(s) = \left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\| = \sqrt{\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s) + \ddot{z}^2(s)}.$$

Egalitatea $\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \right)^2 = \dot{\vec{r}}^2 \ddot{\vec{r}}^2 - \left\langle \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \right\rangle^2$ ne arată că avem și

$$(9.2) \quad k(s) = \left\| \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s) \right\|.$$

Fie pe curba C o parametrizare oarecare cu parametrul t . Amintim că $\frac{ds}{dt} = \left\| \vec{r}'(t) \right\|$ și că pentru inversa aplicației $t \rightarrow s(t)$ notată prin $h: s \rightarrow t = h(s)$ avem $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\left\| \vec{r}'(h(s)) \right\|}$.

Fie $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(h(s))$ cu $t = h(s)$ și $t \rightarrow \vec{r}(t)$ ecuația curbei C în parametrizarea cu t . Avem:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(h(s)) &= \frac{d\vec{r}}{ds}(h(s)) = \frac{d\vec{r}}{dt}(h(s)) \frac{dh(s)}{ds} = \vec{r}'(h(s)) \frac{1}{\left\| \vec{r}'(h(s)) \right\|} \\ \ddot{\vec{r}}(h(s)) &= \vec{r}''(h(s)) \cdot \left(\frac{dh(s)}{ds} \right)^2 + \vec{r}'(h(s)) \frac{d^2h(s)}{ds^2}. \end{aligned}$$

Nu-i nevoie să calculăm $\frac{d^2h(s)}{ds^2}$ pentru că nu mai apare în

$$\dot{\vec{r}}(h(s)) \times \ddot{\vec{r}}(h(s)) = \left(\vec{r}'(h(s)) \times \vec{r}''(h(s)) \right) \frac{1}{\left\| \vec{r}'(h(s)) \right\|^3}.$$

Așadar avem:

$$k(h(s)) = \frac{\left\| \vec{r}'(h(s)) \times \vec{r}''(h(s)) \right\|}{\left\| \vec{r}'(h(s)) \right\|^3}.$$

Cu $t = h(s)$ obținem formula de calcul a curburii

$$(9.3) \quad k(t) = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3}.$$

Formulele lui Frenet sunt utile pentru a calcula produsul mixt $a(s) = \left(\dot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s) \right)$. Avem: $a(s) = \left(\vec{t}, k\vec{n}, \dot{k}\vec{n} + k\dot{\vec{n}} \right) = \left(\vec{t}, k\vec{n}, -k^2\vec{n} + k\tau\vec{b} \right) = k^2\tau(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = k^2\tau$. Rezultă

$$(9.4) \quad \tau(s) = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s) \right)}{k^2(s)}.$$

Am folosit proprietatea că produsul mixt a trei vectori este nul dacă vectorii sunt coplanari. Această proprietate se va folosi repetat mai jos.

Formula (9.4) ne va permite să stabilim o formulă de calcul pentru torsiune. Procedăm ca în cazul curburii și folosim aceleași notații. Derivând încă o dată în formula care dă $\ddot{\vec{r}}(h(s))$, obținem

$$\ddot{\vec{r}}(h(s)) = \vec{r}'''(h(s)) \left(\frac{dh}{ds} \right)^3 + 3\vec{r}''(h(s)) \frac{dh}{ds} \frac{d^2h}{ds^2} + \vec{r}'(h(s)) \frac{d^3h}{ds^3}.$$

Înlocuind în (9.4) vectorii $\dot{\vec{r}}(h(s))$, $\ddot{\vec{r}}(h(s))$, $\ddot{\vec{r}}(h(s))$ și $k(h(s))$, după o simplificare prin $\left(\frac{dh}{ds} \right)^6$ și revenind la $t = h(s)$ se obține

$$(9.5) \quad \tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))^2}.$$

Aceasta este formula de calcul a torsiunii unei curbe în spațiu.

Observații:

1. Interpretarea geometrică (8.6) a curburii ne arată că aceasta este independentă de reperul din spațiu și de parametrizarea curbei pentru că $\Delta\omega$ și Δs au această proprietate. Similar, din (8.7) observăm că nici torsiunea nu depinde de reperul din spațiu și nici de parametrizarea curbei. Se spune că funcțiile k și τ sunt invarianți ai curbei.

2. Amintim că reperul Frenet este bine determinat numai în punctele neinflexionare. Funcția curbură apare în procesul de variație a acestui reper. Formulele (9.2) și respectiv (9.3) ne arată că putem defini curbura și în puncte inflexionare, luând-o egală cu zero în acele puncte. Rezultă că dreapta în spațiu este curbă de curbură nulă și după Teorema 4.1, dacă o curbă în spațiu are curbura nulă, ea este un segment deschis de dreaptă sau o dreaptă.

3. Formula de calcul a torsiunii (9.5) ne arată că torsiunea (în puncte neinflexionare) este pozitivă dacă baza $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$ este drept (pozitiv) orientată și este negativă în caz contrar.

Torsiunea, definită în punctele neinflexionare, se poate defini ca având valoarea zero în punctele inflexionare. Dar ea poate avea valoarea zero și în puncte neinflexionare și anume în acele puncte în care vectorii $\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''$ sunt liniar dependenți. Dacă se întâmplă ca o curbă C să fie într-un plan, care printr-o schimbare a reperului în spațiu se poate lua $z=0$, atunci C se reprezintă prin ecuațiile $x=x(t), y=y(t), z=0$ și avem $\vec{r}'=(x', y', 0)$, $\vec{r}''=(x'', y'', 0)$, $\vec{r}'''=(x''', y''', 0)$ și formula (9.5) ne dă $\tau \equiv 0$. Așadar orice curbă plană este cu

torsiune nulă. Mai sunt și alte curbe de torsiune nulă? Răspunsul este negativ pentru că are loc.

Teorema 9.1. *Orice curbă cu funcția de torsiune nulă este o curbă plană.*

Demonstrație. Dacă $\tau \equiv 0$, formula a treia a lui Frenet ne dă $\dot{\vec{b}}(s) = \vec{0}$. Așadar $\vec{b}(s) = \vec{b}_0$ (vector constant). Această observație în combinație cu $\langle \vec{b}_0, \vec{t}(s) \rangle = 0$, ne arată că $\frac{d}{ds} \langle \vec{b}_0, \vec{r}(s) \rangle = 0$, deci $\langle \vec{r}(s), \vec{b}_0 \rangle = c \in \mathbb{R}$. Așadar vectorul $\vec{r}(s)$, care este vectorul de poziție al unui punct de pe curbă, verifică ecuația $\langle \vec{r}, \vec{b}_0 \rangle - c = 0$, care este ecuația unui plan de direcția normală dată de \vec{b}_0 . În concluzie, curba cu $\tau \equiv 0$ este situată într-un plan care este plan osculator pentru toate punctele neinflexionare ale curbei. ■

După cum am văzut mai sus, unei curbe în spațiu putem să-i asociem funcțiile de curbură și torsiune, funcția curbură fiind strict pozitivă. Aceste funcții sunt intrinsec asociate curbei în sensul că ele nu depind de reperul ales în spațiu și nici de parametrizarea de pe curbă. Mai mult, funcțiile curbură și torsiune determină curba în sensul teoremei care urmează.

Teoremă (fundamentală a geometriei curbelor în spațiu).

Fie două funcții reale $\kappa, \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $s \rightarrow \kappa(s)$, $s \rightarrow \tau(s)$ cu $\kappa(s) > 0 \forall s \in [0, L]$, continue. Există atunci o curbă în spațiu, dată prin ecuația $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [0, L]$, cu s parametru natural, pentru care κ este funcția curbură și τ este funcția torsiune. Mai mult, dacă C_0 și C_1 sunt două asemenea curbe există o deplasare unică D în spațiul E^3 încât $C_1 = D(C_0)$.

Pentru demonstrație se poate consulta [1, p.65].

CAPITOLUL 3

SUPRAFEȚE

Rezumat. Se definește noțiunea de suprafață și se dau reprezentările analitice: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ (parametrică), $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ (explicită), $F(x, y, z) = 0$, $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, $(x, y, z) \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ (implicită). Se definește planul tangent într-un punct P al unei suprafețe S ca planul prin P care conține vectorii necoliniari \vec{r}_u și \vec{r}_v . Forma I-a fundamentală se definește ca restricția produsului scalar la spațiul tangent în P la S . Se descriu proprietățile ei și aplicațiile ei la calcularea lungimii curbelor pe S , a unghiului a două curbe pe S și a ariei unei porțiuni date din S .

Vectorii $\vec{r}_u \equiv \vec{h}_1$, $\vec{r}_v \equiv \vec{h}_2$ și $\vec{N} = \frac{\vec{h}_1 \times \vec{h}_2}{|\vec{h}_1 \times \vec{h}_2|}$ formează un reper (Gauss) mobil pe S . Variația

acestui reper este dată de formulele lui Gauss: $\frac{\partial \vec{h}_i}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \vec{h}_k + b_{ij} \vec{N}$ și formulele lui

Weingarten: $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^i} = -\sum_{j=1}^2 A_i^j \vec{h}_j$, cu $i, j = 1, 2$. Aceste formule introduc coeficienții

$(b_{ij} = b_{ji})$ ai celei de a II-a forme fundamentale și operatorul Weingarten de matrice

(A_j^i) în baza (\vec{h}_1, \vec{h}_2) . Se introduc curburile principale ca soluții ale ecuației

$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k^2 - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{21}b_{11})k + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ și se definește

curbura totală a unei suprafețe: $K = k_1 k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{11}^2}$ și curbura medie

$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Se deduc ecuațiile lui Gauss și apoi ecuațiile Peterson – Mainardi –

Codazzi. Se anunță teorema fundamentală a suprafețelor prin care se arată că formele I-a și a II-a fundamentale determină suprafața S .

§1. Definiția suprafeței în spațiul euclidian E^3 .

Fie spațiul euclidian E^3 dotat un reper ortonormat, pozitiv orientat $\mathfrak{R} = \{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$.

Definiția 1.1. O submulțime S din E^3 se numește **suprafață elementară** dacă $S = h(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime deschisă și aplicația $h: U \rightarrow E^3$ este o scufundare diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$) a lui U în E^3 . Perechea (U, h) se numește parametrizare a suprafeței elementare S .

Vom nota prin $\vec{r}:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sau prin $\vec{h}:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ funcția vectorială definită de aplicația h , adică dacă pentru $(u,v) \in U$ punem $h(u,v) = P(u,v) \in S$, atunci

$$\vec{r}(u,v) = \overrightarrow{OP}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},$$

cu funcțiile coordonate x, y, z diferențiabile de clasă C^s ($s \geq 1$). Amintim că h este scufundare pe U dacă este imersie pe U și homeomorfism pe imagine. Condiția de imersie pe U este ca

$$(1.1) \quad \text{rang} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = 2 \text{ pe } U.$$

Amintim că prin $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, \dots$ notăm derivatele parțiale ale funcțiilor în raport cu variabilele indicate de indicii de jos.

Condiția (1.1) este echivalentă cu

$$(1.2) \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \text{ pe } U.$$

Fie $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime deschisă și aplicația bijectivă $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ dată de ecuațiile

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u &= u(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v &= v(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}, \end{aligned}$$

un difeomorfism de clasă C^s ($s \geq 1$). Condiția ca φ să fie difeomorfism implică

$$(1.4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \tilde{U}.$$

Reciproc, dacă aplicația bijectivă $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ este de clasă C^s ($s \geq 1$) și verifică (1.4) atunci ea este difeomorfism de clasă C^s ($s \geq 1$).

Propoziția 1.1. Fie S suprafață elementară cu parametrizarea (U, h) și un difeomorfism $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$ de clasă C^s ($s \geq 1$). Atunci perechea $(\tilde{U}, \tilde{h} = h \circ \varphi)$ este o nouă parametrizare a suprafeței elementare S .

Demonstrație. Observăm mai întâi că pentru $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow E^3$ avem $\tilde{h}(\tilde{U}) = h(\varphi(\tilde{U})) = h(U) = S$. Aplicația \tilde{h} este diferențiabilă de clasă C^s pentru că este compusa a două aplicații diferențiabile de clasă C^s . Ea este și homeomorfism pe imagine pentru că este compusa a două homeomorfisme pe imagine. Rămâne să

arătăm că \tilde{h} este imersie pe \tilde{U} . Notăm prin \vec{h} aplicația vectorială asociată ei. Avem

$$(1.5) \quad \vec{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \vec{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})).$$

Regula de derivare compusă se extinde, pe componente, la funcții vectoriale încât derivând în (1.5) obținem

$$(1.6) \quad \begin{cases} \vec{h}_u = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \vec{h}_v = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{cases}$$

Având în vedere proprietățile produsului vectorial rezultă

$$(1.7) \quad \vec{h}_u \times \vec{h}_v = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}.$$

Așadar $\vec{h}_u \times \vec{h}_v \neq \vec{0}$ pe \tilde{U} . ■

Aplicația φ se numește schimbare de parametrizare sau de parametri pe S .

Definiția 1.2. O submulțime \mathbb{S} în E^3 se numește **suprafață** dacă orice punct al ei aparține cel puțin unei suprafețe elementare conținută în \mathbb{S} .

§2. Reprezentări analitice ale suprafețelor

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$, o funcție reală de două variabile reale. Mulțimea $G_f = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ se numește graficul (graful) lui f .

Teorema 2.1. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcție diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$). Graficul ei G_f este suprafață elementară în E^3 .

Demonstrație. Fie aplicația $h: D \rightarrow E^3$ care asociază unui punct $(x, y) \in D$, punctul $P \in E^3$ de coordonate $(x, y, f(x, y))$. Este evident că $h(D) = G_f$. Aplicația vectorială $\vec{h}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ asociază lui (x, y) vectorul de componente $(x, y, f(x, y))$. Această aplicație este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$). Ea este imersie pe D pentru că matricea Jacobiană

$$J_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$$

are evident rangul 2 pe D . Mai mult, aplicația h este homeomorfism pe imagine, inversa ei fiind aplicația care asociază punctului $P(x, y, f(x, y))$, perechea $(x, y) \in D$, aplicație care este evident continuă. Am arătat astfel că (D, h) este o parametrizare pentru G_f , deci G_f este suprafață elementară. ■

Observația 2.1. Similar se arată că mulțimile de puncte $\{P(x, \varphi(x, z), z)\}$ și $\{P(\psi(y, z), y, z)\}$, unde φ și ψ sunt funcții asemănătoare cu f , sunt suprafețe elementare în E^3 .

Teorema 2.1 ne permite să spunem că ecuația

$$(2.1) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad D \text{ mulțime deschisă,}$$

reprezintă analitic o suprafață (elementară).

Similar, ecuațiile

$$(2.1') \quad y = \varphi(x, z), \quad (x, z) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$(2.1'') \quad x = \psi(y, z), \quad (y, z) \in D'' \subseteq \mathbb{R}^2, \quad D' \text{ și } D'' \text{ mulțimi deschise,}$$

reprezintă analitic suprafețe (elementare) în E^3 .

În aceste reprezentări funcțiile f, φ, ψ sunt desigur diferențiabile de clasă C^s ($s \geq 1$). Pentru că în continuare vom lucra numai cu funcții diferențiabile de o clasă suficient de înaltă pentru a ne asigura de existența derivatelor necesare în calcul, vom omite a preciza de fiecare dată acest lucru.

Reprezentările analitice (2.1), (2.1') și (2.1'') se numesc *reprezentări explicite* ale unei suprafețe (elementare).

Teorema 2.2. Mulțimea $\mathbb{S} = \{P(\vec{r}) \mid \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, U \text{ mulțime deschisă, cu funcția vectorială } \vec{r} \text{ diferențiabilă de clasă } C^s (s \geq 1) \text{ pe } U \text{ și } \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \text{ pe } U\}$ este suprafață în E^3 .

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din \mathbb{S} aparține cel puțin unei suprafețe elementare inclusă în \mathbb{S} . Fie $P_0(\vec{r}_0(u_0, v_0)) \in \mathbb{S}$. Deci $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0, v_0)} \neq \vec{0}$, ceea ce înseamnă că cel puțin una dintre cele trei componente ale vectorului $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ este diferită de zero în punctul (u_0, v_0) . Să presupunem că $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \neq 0$.

Continuitatea funcțiilor în discuție ne asigură că există un deschis U_0 care conține punctul (u_0, v_0) și este inclus în U pe care $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$.

Teorema de inversare locală ne arată că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases} (u, v) \in U_0$$

se poate rezolva în raport cu u și v și se obțin soluții diferențiabile de clasă C^s de forma

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases} (x, y) \in D,$$

unde D este o mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 , ce conține punctul de coordonate $(x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0))$. Înlocuim aceste soluții în ecuația $z = z(u, v)$ și obținem

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de clasă C^s fiind o compunere de funcții diferențiabile de clasă C^s .

Considerăm graficul G_f al funcției f . După Teorema 2.1, G_f este suprafață elementară. Punctul $P_0 \in G_f$ pentru că are coordonatele $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ care, cu notațiile de mai sus, având în vedere și că $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$, devin $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. În plus, G_f este conținută în \mathbb{S} pentru că pentru orice $(u, v) \in U_0$, coordonatele $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ se pot exprima în forma $(x, y, f(x, y))$.

În cazul în care $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$ pe U , cel puțin unul dintre determinanții

$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$ este diferit de zero în (u_0, v_0) . Un raționament similar ne va arăta

că punctul P_0 aparține sau unei suprafețe elementare $\{P(x, \varphi(x, z), z)\}$ sau unei suprafețe elementare de forma $\{P(\psi(y, z), y, z)\}$ cu φ și ψ funcții diferențiabile pe deschizi din \mathbb{R}^2 , suprafețe elementare conținute în \mathbb{S} . ■

Teorema 2.2 ne arată că

$$(2.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

U mulțime deschisă, ne dă o reprezentare analitică a unei suprafețe în E^3 . Această reprezentare se numește *reprezentare vectorial – parametrică* a unei suprafețe în E^3 . Numerele u, v se numesc parametri pe suprafață. O pereche (u, v) determină unic un punct P de pe suprafață. Vom scrie $P(u, v)$.

Reprezentarea (2.2) are forma scalară

$$(2.2') \quad \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}^2 > 0$$

pe mulțimea deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Reprezentarea dată de ecuațiile (2.2') se numește *reprezentare parametrică* a suprafeței.

Teorema 2.3. Mulțimea $\mathbb{S} = \{P(x, y, z) | F(x, y, z) = 0, \text{ cu } F: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ funcție diferențiabilă de clasă } C^s \text{ pe un deschis } V \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ și } F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0 \text{ pe } V\}$, dacă este nevidă, este o suprafață în E^3 .

Demonstrație. Fie $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}$, deci $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Să presupunem că $F_z|_{P_0} \neq 0$. Rezultă că $F_z \neq 0$ pe o mulțime deschisă V_0 ce conține P_0 și este inclusă în V . După o eventuală micșorare, mulțimea V_0 se poate scrie în forma $V_0 = U \times I$, unde U este o mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 centrată în (x_0, y_0) și I un interval deschis centrat în z_0 . Teorema funcțiilor implicite ne asigură că în aceste condiții ecuația $F(x, y, z) = 0$ se poate rezolva în raport cu z , adică există o funcție diferențiabilă de clasă C^s , $f: U \rightarrow I$, încât

$$1^\circ f(x_0, y_0) = z_0 \quad 2^\circ F(x, y, f(x, y)) = 0 \text{ pe } U.$$

Considerăm graficul G_f al funcției f . După Teorema 1.2, G_f este suprafață elementară. Condiția 1° ne asigură că $P_0 \in G_f$ iar condiția 2° ne arată că $G_f \subset \mathbb{S}$. Dacă $F_z = 0$ pe V atunci fie $F_x|_{P_0} \neq 0$, fie $F_y|_{P_0} \neq 0$. Un raționament analog ne arată că P_0 aparține fie unei suprafețe elementare $\{P(x, \varphi(x, z), z)\}$ fie unei suprafețe elementare $\{P(\psi(y, z), y, z)\}$, cu funcțiile φ și ψ diferențiabile pe deschise din \mathbb{R}^2 , ambele incluse în \mathbb{S} . ■

După Teorema 2.3, condițiile

(2.3) $F(x, y, z) = 0, F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ pe V mulțime deschisă în \mathbb{R}^3 , reprezintă analitic o suprafață. Această reprezentare se numește reprezentare **implicită**.

Putem spune, în concluzie, că o suprafață în E^3 se poate reprezenta analitic în trei moduri: explicit, parametric și implicit.

Aceste trei reprezentări analitice sunt local echivalente în sensul că orice punct P al unei suprafețe aparține unei suprafețe elementare care se poate reprezenta în toate cele trei moduri posibile.

Într-adevăr, dacă P este pe o suprafață elementară dată explicit în forma $z = f(x, y)$, cu notația $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ această suprafață o putem gândi dată implicit în forma $F(x, y, z) = 0$, pentru că $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2 \neq 0$. Pe de altă parte aceeași suprafață elementară se poate gândi ca dată parametric în

forma $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases}$ pentru că suma de determinanți la pătrat din (2.2') este aici $1 + f_x^2 + f_y^2 > 0$.

Dacă P este pe o suprafață dată implicit, Teorema 2.3 ne arată cum să ajungem la forma explicită. În cazul în care P este pe o suprafață dată parametric, Teorema 2.2 ne indică modul de explicitare.

În practică se folosesc toate cele trei reprezentări analitice. În probleme teoretice reprezentarea parametrică se dovedește mai utilă. Aceasta va fi folosită cu precădere în cele ce urmează pentru a prezenta geometria diferențială euclidiană a suprafețelor.

Prin geometria diferențială euclidiană a suprafețelor înțelegem proprietățile suprafețelor și mărimile, construcțiile asociate suprafețelor, care sunt invariante la izometriile spațiului euclidian E^3 și la schimbările de parametri pe suprafață. Vom spune despre o proprietate a suprafeței sau o mărime asociată ei că are *caracter geometric* sau, simplu, că este *geometrică* dacă nu depinde, nu este modificată, de izometriile lui E^3 și de nici o reparametrizare a suprafeței. În continuare vom prezenta, studia, folosi și aplica *numai* proprietăți *geometrice* ale suprafețelor chiar dacă acest lucru nu va fi menționat întotdeauna în mod explicit. Cititorul este invitat să verifice caracterul geometric al proprietăților și mărimilor întâlnite.

Fie E^3 dotat cu un reper ortonormat $\mathfrak{R} = \{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ pozitiv orientat și un punct $P(x, y, z)$, x, y, z fiind coordonate în reperul \mathfrak{R} .

O izometrie a lui E^3 cu păstrarea orientării transformă $P(x, y, z)$ într-un punct $P'(x', y', z')$ și reperul R într-un reper ortonormat la fel orientat $R' = \{O', (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')\}$. Cum (x', y', z') sunt coordonatele lui P' în reperul R' , formulele care dau analitic izometria sunt identice cu formulele de trecere de la reperul R la reperul R' . Încât putem substitui izometria care mută punctul P în punctul P' cu o schimbare de repere ortonormate care lasă P nemișcat dar schimbă coordonatele sale (x, y, z) în (x', y', z') . Rezultă că pentru a ne asigura că o proprietate a suprafeței exprimată cu ajutorul unui reper ortonormat este invariantă la izometrie, este suficient să verificăm că este invariantă la schimbarea reperului ortonormat folosit în exprimarea ei.

Fie, de exemplu, o suprafață reprezentată analitic în reperul R prin $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in U$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ pe U unde funcția vectorială \vec{r} este diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$). Această proprietate de diferențiabilitate este invariantă la izometriile spațiului, pentru că este invariantă la schimbarea reperului R în reperul R' . Într-adevăr, în R' punctul $P(\vec{r}(u, v))$ are vectorul de poziție $\vec{\rho}(u, v)$ dat de formula $\vec{\rho}(u, v) = \vec{O'O} + \vec{r}(u, v)$, cu $\vec{OO'}$ independent de (u, v) . Este evident că funcția vectorială $\vec{\rho}$ se poate deriva până la ordinul s și în plus derivatele ei coincid cu cele ale funcției vectoriale \vec{r} . Ca o consecință avem că $\vec{\rho}_u \times \vec{\rho}_v = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ și deci și proprietatea $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ este invariantă la (păstrată de) izometriile spațiului E^3 . Proprietățile menționate sunt invariante și la schimbări de parametri pe suprafață. Pentru a se convinge, cititorul este invitat să revadă demonstrația Propoziției 1.1.

§3. Curbe pe o suprafață

În continuare vom studia numai proprietăți punctuale și locale ale suprafețelor și ca atare ne vom limita la a considera numai suprafețe elementare numite simplu suprafețe și notate de obicei cu S . Amintim că cele trei reprezentări analitice pentru S sunt echivalente și vor fi folosite alternativ, după nevoile de raționament sau de calcul.

Fie suprafața $S = h(U)$ cu U mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 și $h: U \rightarrow E^3$ scufundare diferențiabilă de clasă C^s ($s \geq 1$).

Definiția 3.1. Se numește curbă pe S imaginea prin h a unui arc elementar c din U .

Fie $c = \gamma(I)$ unde I este un interval deschis în \mathbb{R} și γ o scufundare a lui I în \mathbb{R}^2 identificat cu E^2 prin alegerea unui reper ortonormat. Rezultă că $C = h(\gamma(I))$ este o curbă pe S . (Fig. 21)

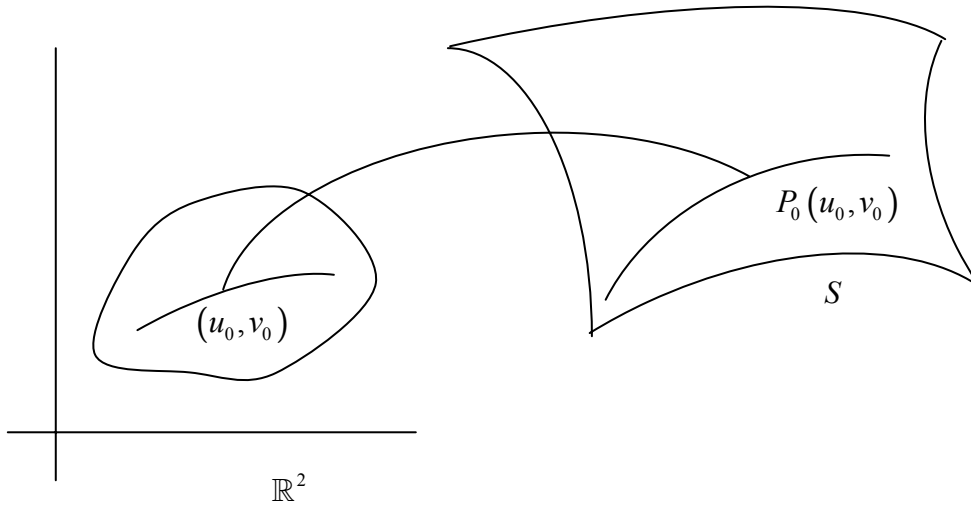


Fig. 21

Arcul elementar c se poate reprezenta analitic în formele echivalente:

$$(3.1) \quad \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t), \quad u'^2 + v'^2 > 0 \text{ pe } I, \end{cases}$$

$$(3.2) \quad v = f(u) \text{ sau } u = g(v), \quad f, g \text{ funcții reale de o variabilă}$$

reală,

$$(3.3) \quad F(u, v) = 0, \quad F_u^2 + F_v^2 > 0, \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad D \text{ mulțime deschisă.}$$

Cunoașterea unei asemenea reprezentări este suficientă pentru a descrie curba pe suprafață pentru că nu avem decât de efectuat o compunere cu aplicația h . Din acest motiv vom spune că (3.1) – (3.3) sunt reprezentări analitice ale curbei C pe suprafața S .

Reprezentarea analitică (3.1) duce la reprezentarea curbei C în forma

$$(3.1') \quad \begin{cases} x = x(u(t), v(t)), \\ y = y(u(t), v(t)), \\ z = z(u(t), v(t)), \quad t \in I, \text{ sau} \end{cases}$$

$$(3.1'') \quad \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad t \in I.$$

Formula de derivare a funcțiilor compuse ne dă

$$(3.4) \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \vec{r}_v(u(t), v(t))v'(t), \quad t \in I.$$

Această formulă ne arată că $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \neq \vec{0}$ pe I pentru că în caz contrar, având în vedere că derivatele u' și v' nu sunt simultan nule, ar rezulta că \vec{r}_u și \vec{r}_v sunt vectori coliniari, adică $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ cel puțin într-un punct din U , fals.

În cazul în care arcul c are reprezentarea (3.2), curba C are ecuațiile

$$(3.2') \quad \vec{r} = \vec{r}(u, f(u)), \quad u \in J \text{ interval deschis în } \mathbb{R}.$$

Formula

$$(3.5) \quad \frac{d\vec{r}}{du} = \vec{r}_u + \vec{r}_v f',$$

ne arată că $\frac{d\vec{r}}{du} \neq \vec{0}$ pe J .

Pentru a obține o reprezentare a curbei C plecând de la reprezentarea (3.3), trebuie mai întâi să facem o explicitare în forma (3.2).

Fie $P_0(u_0, v_0) \in S$. Din injectivitatea aplicației h rezultă că perechea (u_0, v_0) este unic determinată încât $P_0 = h(u_0, v_0)$.

Fie în U deschis în \mathbb{R}^2 segmentul de dreaptă de ecuație

$$(3.6) \quad v = v_0$$

care se poate reprezenta parametric prin

$$(3.6') \quad \begin{cases} u = u \\ v = v_0, \end{cases} \quad u \in J \text{ interval deschis în } \mathbb{R}.$$

Imagina prin h a acestui segment de dreaptă este o curbă pe S care trece prin P_0 și care este de fapt mulțimea punctelor $P(u, v_0)$ cu $u \in J$. Ea se poate reprezenta și în forma

$$(3.6'') \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v_0), \quad u \in J.$$

Această curbă se numește linia parametrică $v = v_0$. Similar definim curba numită linia parametrică $u = u_0$ ca imaginea segmentului de dreaptă (deschis) din U de ecuații

$$(3.7) \quad u = u_0,$$

$$(3.7') \quad \begin{cases} u = u_0, \\ v = v, \end{cases} \quad v \in I \text{ interval deschis în } \mathbb{R}$$

$$(3.7'') \quad \vec{r} = \vec{r}(u_0, v), \quad v \in I.$$

Punctul P_0 este la intersecția liniilor (curbelor) parametrice $u = u_0$ și $v = v_0$, motiv pentru care se spune că u_0 și v_0 sunt coordonate curbilinii ale punctului P_0 .

A se compara cu situația unui punct M dintr-un plan raportat la un reper cartezian Oxy . Punctul $M(x_0, y_0)$ se găsește la intersecția dreptelor $x = x_0$ și $y = y_0$ și se spune că (x_0, y_0) sunt coordonate rectangulare.

Vectorul tangent la curba $v = v_0$ în punctul $P_0 = (u_0, v_0)$ este $\frac{d\vec{r}}{dv} = \vec{r}_v = \vec{r}_v(u_0, v_0)$ iar vectorul tangent la curba $u = u_0$ în același punct este $\vec{r}_u(u_0, v_0)$. Amintim că acești vectori sunt necoliniari pentru că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ pe U .

Dacă vom considera imaginile prin h ale tuturor segmentelor din U de ecuație $v = v_0$, obținem pe S o familie de curbe numită familia curbelor sau liniilor parametrice $v = \text{constant}$. Similar imaginile prin h ale segmentelor din U de ecuație $u = u_0$ constituie o familie de curbe pe S , numită familia curbelor sau liniilor parametrice $u = \text{constant}$. Prin fiecare punct P_0 al suprafeței trece câte o linie din fiecare familie de linii parametrice, care nu au alte puncte comune în afara lui P_0 pentru că h este aplicație injectivă și vectorii lor tangenți în P_0 sunt necoliniari. Se spune că cele două familii de linii parametrice formează o rețea pe suprafață, numită rețeaua liniilor parametrice (Fig. 22)

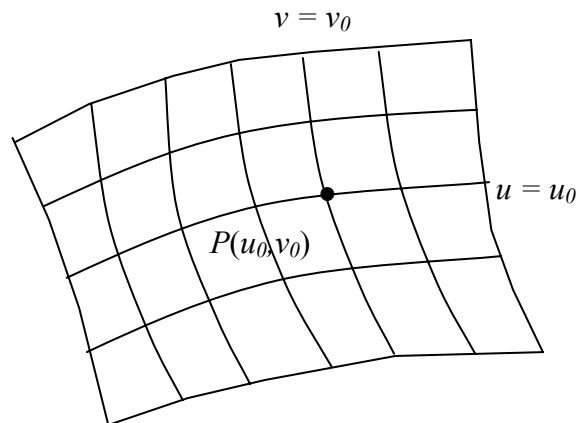


Fig. 22. Rețeaua liniilor parametrice pe S

Observație. Rețeaua liniilor parametrice se construiește plecând de la o parametrizare, deci depinde de parametrizare. Reciproc, dată o rețea de curbe pe suprafață, adică două familii de curbe pe suprafață, cu proprietatea că prin fiecare punct al suprafeței trece câte o curbă din fiecare familie, curbe care nu au alte puncte comune și au vectorii tangenți în punctul de intersecție necoliniari, se obține o parametrizare a ei.

§4. Spațiul tangent într-un punct al unei suprafețe

În Capitolul 0 am numit spațiul vectorial V^3 spațiu tangent la E^3 în O pentru motivul că aplicația $\varphi_O : E^3 \rightarrow V^3$ care asociază lui $A \in E^3$ vectorul $\overrightarrow{OA} \in V^3$ este bijecție. Am stabilit și că pentru orice punct $P \in E^3$ aplicația similară $\varphi_P : E^3 \rightarrow V^3$, $\varphi_P(A) = \overrightarrow{PA}$, $A \in E^3$, este bijecție, adică V^3 este spațiu tangent în toate punctele lui E^3 .

Noțiunea de spațiu tangent este o noțiune punctuală. Pentru a sublinia acest lucru vom considera mulțimea $T_P E^3 = \{(P, \vec{v}), \vec{v} \in V^3\}$ și o vom organiza ca spațiu liniar cu operațiile

$$(4.1) \quad (P, \vec{v}) + (P, \vec{w}) = (P, \vec{v} + \vec{w}), \quad a(P, \vec{v}) = (P, a\vec{v}), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3.$$

Aplicația dată de $(P, \vec{v}) \rightarrow \vec{v}$ este evident un izomorfism liniar al lui $T_P E^3$ cu V^3 .

Definiția 4.1. Numim $T_P E^3$ spațiu liniar tangent la E^3 în $P \in E^3$.

Vom da o interpretare geometrică lui $T_P E^3$ care va justifica denumirea de spațiu tangent. Fie în E^3 un reper ortonormat $R = \{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ pozitiv orientat în raport cu care $P \in E^3$ are vectorul de poziție \vec{r}_0 . Fie dreapta prin P de direcția vectorului $\vec{v} \in V^3$. Ecuația ei este $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ și observăm că această dreaptă (curbă particulară) are proprietățile

- i) La valoarea $t = 0$ trece prin P ,
- ii) Vectorul tangent ei în P este $\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}$.

De fapt există o mulțime de curbe în E^3 cu proprietățile i) și ii). Ele au comun P și \vec{v} . Le vom pune într-un același “coș” pe care-l vom eticheta cu (P, \vec{v}) .

Avem astfel o semnificație geometrică a elementului (P, \vec{v}) din $T_P E^3$: el reprezintă

o mulțime de curbe care trec prin P și au în P ca vector tangent pe \vec{v} . Prin reparametrizare se poate aranja ca fiecare curbă din mulțime să treacă prin P la valoarea zero a parametrului de pe curbă. Cititorul este invitat să regândească această interpretare a lui $T_P E^3$ în termeni de relație de echivalență. “Coșul” de care vorbeam este o clasă de echivalență. Evident că pentru a da clasa de echivalență este suficient să dăm un reprezentant al ei. În cazul acesta cel mai simplu este să dăm dreapta prin P de vector director \vec{v} .

Considerațiile de mai sus ne sugerează o metodă de a defini o noțiune de spațiu tangent într-un punct al unei mulțimi diferite de E^3 . Ar trebui ca acea mulțime să conțină curbe care să admită tangente. Vom folosi această metodă la suprafețe.

Fie o suprafață $S = h(U)$ cu U mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 și $h: U \rightarrow E^3$ scufundare. Fie $P \in S$ definit de $h(u_0, v_0)$, adică (u_0, v_0) sunt coordonatele sale curbilinii. Vom nota, ca de obicei, prin \vec{r} funcția vectorială asociată lui h .

Fie o curbă $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, cu $\gamma(0) = (u_0, v_0)$. Atunci $h \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ este o curbă pe S care trece prin P la valoarea zero a parametrului.

Definiția 4.2. Se numește vector tangent la S în punctul $P \in S$, un vector din $T_P E^3$ care este tangent la o curbă prin P , situată pe S .

Vom nota prin $T_P S$ mulțimea vectorilor tangenți la S în punctul $P \in S$.

Observație. Fiind dat un vector X din V^3 tangent la suprafața S în punctul ei P , există o infinitate de curbe prin P , situate pe S , care să aibă ca vector tangent în P , vectorul X . Ele vor fi gândite într-o clasă de echivalență definită de următoarea relație de echivalență: două curbe pe S care trec prin P sunt echivalente dacă au același vector tangent în P (Fig. 23).

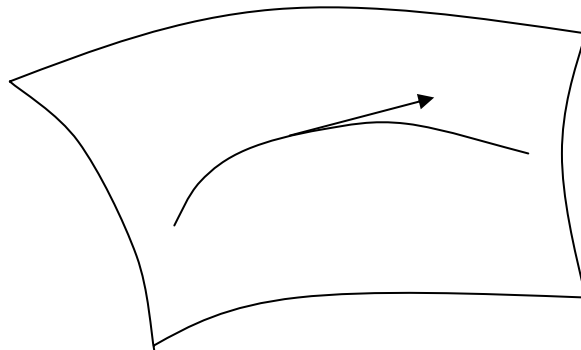


Fig. 23

Continuăm cu folosirea notațiilor deja introduse. Ecuația curbei imagine pe S a curbei γ este

$$(4.2) \quad \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad u'^2(t) + v'^2(t) > 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Această curbă trece prin P la valoarea $t = 0$.

Vectorul tangent ei în P este

$$(4.3) \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Vectorul $\frac{d\vec{r}}{dt}(0)$ este tangent suprafeței S în P .

Linia parametrică $v = v_0$ trece prin P iar vectorul tangent ei în P este $\vec{r}_u(u_0, v_0)$. Deci $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ este tangent suprafeței S în P . Similar constatăm că $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ este tangent suprafeței S în P . Așadar vectorii necoliniari (deci liniar independenți) $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ din V^3 sunt în $T_P S$. Mai mult, formula (4.3) ne arată că orice vector din $T_P S$ este o combinație liniară de vectorii liniar independenți $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0, v_0)$. Rezultă că are loc

Propoziția 4.1. *Mulțimea $T_P S$ este un subspațiu liniar de dimensiune 2 a spațiului liniar $T_P E^3$.*

Pe baza acestei propoziții vom numi $T_P S$ spațiu liniar tangent la S în punctul $P \in S$.

Noțiunea de spațiu tangent, noțiune punctuală, este o noțiune geometrică, intrinsec asociată suprafeței S . Vom demonstra

Propoziția 4.2. *Spațiul liniar tangent $T_P S$ nu depinde de reperul ales în E^3 și nici de parametrizarea suprafeței S .*

Demonstrație. Am văzut mai sus că vectorii \vec{r}_u și \vec{r}_v nu depind de reperul R din E^3 , deci nici $T_P S$ nu depinde de R . La o schimbare de parametrii (1.3), (1.4), au loc formulele (1.6) care ne arată că vectorii \vec{h}_u , \vec{h}_v generează subspațiul liniar $T_P S$. ■

§5. Planul tangent într-un punct al suprafeței. Normala la suprafață

Continuăm să considerăm o suprafață S cu reprezentarea parametrică

$$(5.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \text{ pe mulțimea deschisă } U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

și un punct $P(u_0, v_0)$ pe S .

Definiția 5.1. *Subspațiul afin din E^3 determinat de P și spațiul liniar $T_P S$ se numește plan tangent la S în P .*

Am văzut că $T_P S$ este generat de vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Deci planul tangent la S în p este planul care trece prin P și conține acești vectori. Ecuația sa este evident

$$(5.2) \quad (\vec{r} - \vec{r}(u_0, v_0), \vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)) = 0$$

sau cu ajutorul coordonatelor de vectori:

$$(5.2') \quad \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Putem da planul tangent la S în P și prin ecuația

$$(5.2'') \quad \vec{r} = \vec{r}(u_0, v_0) + \lambda \vec{r}_u(u_0, v_0) + \mu \vec{r}_v(u_0, v_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Fie suprafața S reprezentată explicit în forma

$$(5.3) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \text{ mulțime deschisă în } \mathbb{R}^2.$$

Pentru a găsi ecuația planului tangent la S în $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, trecem la reprezentarea parametrică

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in D$$

și aplicăm (5.2). Obținem

$$(5.4) \quad p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

În cazul în care suprafața S este reprezentată implicit prin

$$(5.5) \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0, \quad (x, y, z) \in V$$

mulțime deschisă în \mathbb{R}^3 , pentru a obține ecuația planului tangent la S în $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ se face o explicitare, de exemplu în forma $z = f(x, y)$ dacă $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ cu $z_0 = f(x_0, y_0)$ și $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ pe o submulțime deschisă ce conține punctul (x_0, y_0, z_0) . Prin derivarea acestei identități în raport cu x și y se obțin identitățile

$$F_x + F_z \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$$

din care deducem

$$p = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad q = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Prin înlocuire în (5.4) obținem ecuația planului tangent la S , dată prin (5.5), în $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ în forma

$$(5.6) \quad (x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ecuția (5.6) se scrie compact în forma

$$(5.6') \quad \langle \vec{r} - \vec{r}(u_0, v_0), \text{grad}_0 F \rangle = 0,$$

unde indicele 0 arată că vectorul grad F se calculează în punctul (x_0, y_0, z_0) .

Definiția 5.1. Dreapta perpendiculară pe planul tangent la S în punctul $P \in S$ care trece prin P se numește normala la suprafață în punctul P .

Vectorul care dă direcția normalei în $P(u_0, v_0)$ este vectorul $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ calculat în (u_0, v_0) . Ecuția normalei la S în punctul P este

$$(5.7) \quad \vec{r} = \vec{r}(u_0, v_0) + \lambda \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Versorul $\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ se numește versorul normalei la S în

punctul P . Vectorii $(\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0))$ sunt liniari independenți, adică formează o bază în $T_P E^3$. Ansamblul $\{P, (\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0))\}$ este un reper în E^3 cu originea în $P \in S$, numit reperul lui Gauss. Reperul lui Gauss se modifică atunci când punctul P variază pe S . Cu alte cuvinte, el este un reper mobil pe S .

§6. Forma I-a fundamentală a unei suprafețe

Fie din nou suprafața S reprezentată parametric prin (5.1). Începând cu acest paragraf, vom nota parametrii pe S astfel: $u = u^1$, $v = u^2$ și vom pune $\vec{r}_u = \vec{r}_{u^1} = \vec{h}_1$, $\vec{r}_v = \vec{r}_{u^2} = \vec{h}_2$.

Cu $P \in S$, vom nota prin X_P, Y_P, \dots vectori din $T_P S$. Rezultă că vectorul $X_P \in T_P S$ este de forma

$$(6.1) \quad X_P = X^1 \vec{h}_1 + X^2 \vec{h}_2 = \sum_{i=1}^2 X^i \vec{h}_i, \quad X^1, X^2 \in \mathbb{R},$$

pentru că vectorii \vec{h}_1 și \vec{h}_2 formează o bază în $T_p S$.

Vectorii tangenți la S în $P \in S$ au caracter geometric pentru că au fost definiți ca vectori tangenți la curbe pe S care trec prin P . Amintim că factorii X^1 și X^2 din (6.1) sunt în fond

$$(6.2) \quad X^1 = \frac{du^1}{dt}(0), \quad X^2 = \frac{du^2}{dt}(0),$$

unde

$$(6.3) \quad \begin{cases} u^1 = u^1(t) \\ u^2 = u^2(t) \end{cases}, \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 > 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

reprezintă o curbă pe S care trece prin P la $t = 0$.

Schimbarea reperului ortonormat din E^3 nu modifică nici X^1, X^2 și nici vectorii \vec{h}_1, \vec{h}_2 .

Schimbarea parametrilor pe suprafață modifică atât numerele X^1, X^2 cât și vectorii \vec{h}_1, \vec{h}_2 dar, după cum vom verifica imediat, X_p rămâne același.

Fie schimbarea de parametrii

$$(6.4) \quad \begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \tilde{U} \text{ multime deschisă în } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

cu condiția

$$(6.4') \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \tilde{U}.$$

Sistemul (6.4) în necunoscutele \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 se poate rezolva în forma

$$(6.5) \quad \begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2) \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in U \end{cases}$$

În parametrizația dată de \tilde{u}^1 și \tilde{u}^2 , curba (6.3) are ecuațiile

$$(6.6) \quad \begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1(t), u^2(t)) \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1(t), u^2(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

Prin derivare în raport cu t a funcțiilor din (6.6), obținem

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^1 &:= \frac{d\widetilde{u}^1}{dt}(0) = \frac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}(0) \\ \widetilde{X}^2 &:= \frac{d\widetilde{u}^2}{dt}(0) = \frac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}(0),\end{aligned}$$

unde derivatele parțiale $\frac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^2}, \dots$ sunt calculate în $(u^1(0), u^2(0))$, coordonatele curbilinii ale lui $P \in S$.

Aceste formule se pot scrie mai compact astfel:

$$(6.7) \quad \widetilde{X}^i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^j} X^j, \quad i = 1, 2.$$

Pe de altă parte, în noile notații, formula (1.6) se scrie în forma

$$(6.8) \quad \overrightarrow{\widetilde{h}}_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u^j}{\partial \widetilde{u}^i} \overrightarrow{h}_j,$$

unde $\overrightarrow{\widetilde{h}} = \overrightarrow{h}(u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2))$. Ne propunem să arătăm că

$$(6.9) \quad \sum_{i=1}^2 \widetilde{X}^i \overrightarrow{\widetilde{h}}_i = \sum_{j=1}^2 X^j \overrightarrow{h}_j.$$

Avem: $\sum_{i=1}^2 \widetilde{X}^i \overrightarrow{\widetilde{h}}_i = \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \widetilde{u}^i} X^k \overrightarrow{h}_j = \sum_{i,j,k=1}^2 \delta_k^j X^k \overrightarrow{h}_j = \sum X^j \overrightarrow{h}_j$, unde am

folosit relațiile

$$(6.10) \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \widetilde{u}^i} = \delta_k^j = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Rămâne să ne convingem că are loc (6.10).

Știm că ecuațiile (6.5) au fost obținute rezolvând sistemul (6.4). Așadar au loc identitățile

$$u^j \equiv u^j(\widetilde{u}^1(u^1, u^2), \widetilde{u}^2(u^1, u^2)) \quad j = 1, 2.$$

Prin derivare compusă în raport cu u^k , $k = 1, 2$, obținem:

$$\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u^j}{\partial \widetilde{u}^i} \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k}, \quad j, k = 1, 2.$$

Dar $\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \delta_k^j$.

Formula (6.9) ne arată că $X_P \in T_P S$ nu depinde de parametrizarea de pe suprafața S .

Definiția 6.1. Aplicația $g_P : T_P S \times T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază perechii (X_P, Y_P) numărul real $g_P(X_P, Y_P) = \langle X_P, Y_P \rangle$, unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ înseamnă produsul scalar în V^3 , se numește forma I-a fundamentală a suprafeței S în P . Aplicația $P \rightarrow g_P$ se numește forma I-a fundamentală a suprafeței S .

Observație. Forma I-a fundamentală are caracter geometric pentru că X_P, Y_P sunt vectori tangenți și produsul scalar a doi vectori nu depinde de reperul din spațiu.

Aplicația g_P este evident biliniară, simetrică și pozitiv definită ($g_P(X_P, Y_P) > 0 \forall X_P \neq 0 \in T_P S$).

Fie X_P dat de (6.1) și $Y_P = Y^1 \vec{h}_1 + Y^2 \vec{h}_2$. Bilinearitatea și simetria aplicației g_P conduc la formula

$$(6.11) \quad g_P(X_P, Y_P) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j, \text{ unde}$$

$$(6.11') \quad g_{ij}(P) = \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle, \text{ produs scalar calculat în } P(u_0^1, u_0^2).$$

Funcțiile g_{ij} care depind de P , iar prin intermediul coordonatelor curbilinii apar definite pe U , se numesc *coeficienții formei I-a fundamentale*.

Să efectuăm o schimbare de parametri de forma (6.4) cu (6.4') pe S . Fie $\widetilde{g}_{ij}(P) = \langle \widetilde{h}_i, \widetilde{h}_j \rangle$ noii coeficienți ai formei I-a fundamentale. Cu ajutorul formulei

$$(6.8), \text{ aceștia devin } \widetilde{g}_{ij}(P) = \left\langle \sum_{r=1}^2 \frac{\partial u^r}{\partial \widetilde{u}^i} \vec{h}_r, \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u^s}{\partial \widetilde{u}^j} \vec{h}_s \right\rangle. \text{ Prin folosirea proprietăților}$$

produsului scalar obținem

$$(6.12) \quad \widetilde{g}_{ij}(P) = \sum_{r,s=1}^2 \frac{\partial u^r}{\partial \widetilde{u}^i} \frac{\partial u^s}{\partial \widetilde{u}^j} g_{rs}(P).$$

În aceste egalități P are în stânga coordonatele curbilinii $(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2)$ iar în dreapta are coordonatele curbilinii $(u^1(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2), u^2(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2))$ și derivatele parțiale sunt calculate în $(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2)$.

Având în vedere (6.10), ecuațiile (6.12) se pot rezolva în raport cu g_{rs} și se obțin formulele

$$(6.12') \quad g_{rs}(P) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^r} \frac{\partial \widetilde{u}^j}{\partial u^s} \widetilde{g}_{ij}(P).$$

Formulele (6.12) și (6.12') constituie legea de transformare a coeficienților formei I-a fundamentale la o schimbare de parametri pe suprafață.

Coeficienții formei I-a fundamentale sunt în număr de trei:

$$(6.13) \quad g_{11} = \langle \vec{h}_1, \vec{h}_1 \rangle, \quad g_{12} = g_{21} = \langle \vec{h}_1, \vec{h}_2 \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{h}_2, \vec{h}_2 \rangle$$

sau în notații clasice

$$(6.14) \quad g_{11} := E = \vec{r}_u^2, \quad g_{12} := F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle, \quad g_{22} := G = \vec{r}_v^2.$$

Forma pătratică asociată formei I-a fundamentale se numește, de obicei, tot forma I-a fundamentală și se notează tot prin g_p . Avem

$$(6.15) \quad g_p(X_p) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i X^j = g_{11} (X^1)^2 + 2g_{12} X^1 X^2 + g_{22} (X^2)^2,$$

pentru vectorul tangent X_p dat de (6.1).

Notăm prin $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ matricea formei pătratice g_p . Definiția lui

g_p ne spune că $\Delta = \det G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ este o funcție pozitivă pe U . Acest fapt rezultă și astfel:

$$(6.16) \quad \Delta = \vec{h}_1^2 \vec{h}_2^2 - \langle \vec{h}_1, \vec{h}_2 \rangle^2 = |\vec{h}_1 \times \vec{h}_2|^2 > 0 \text{ pe } U.$$

Să ne amintim că vectorul X_p are coordonatele de forma (6.2). Direcția sa

este de forma $\left\{ \lambda \left(\frac{du^1}{dt}(0), \frac{du^2}{dt}(0) \right), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Cu λ particular de forma

$\lambda = dt$, constatăm că direcția lui X_p este complet determinată de diferențialele (du^1, du^2) . Vom spune că $du = (du^1, du^2)$ reprezintă o direcție tangentă suprafeței.

Pentru o asemenea direcție definim forma pătratică pozitiv definită

$$(6.17) \quad \phi(P, du) = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2,$$

unde coeficienții sunt calculați în $P(u^1, u^2)$, numită, de asemenea, forma I-a fundamentală a suprafeței S . În notații clasice

$$(6.17') \quad \phi(P, du, dv) = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2.$$

În cazul în care suprafața este dată în forma explicită $z = f(x, y), (x, y) \in D$, mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 , punem $x = u, y = v$ și trecem la reprezentarea parametrică $\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ și rezultă $\vec{r}_u = (1, 0, p)$, $\vec{r}_v = (0, 1, q)$, unde $p = f_x, q = f_y$, în notațiile lui Ch. Monge. Așadar avem

$$(6.18) \quad E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2, \Delta = 1 + p^2 + q^2.$$

Fie suprafața S dată implicit de ecuația $F(x, y, z) = 0, F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ pe V , mulțime deschisă în \mathbb{R}^3 . Cu $F_z \neq 0$ pe o submulțime deschisă $V_0 \subset V$, putem explicita $z = f(x, y)$ și are loc identitatea $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ pe o submulțime deschisă D din \mathbb{R}^2 . Prin derivare în raport cu x și y , obținem identitățile $F_x + F_z \cdot p \equiv 0, F_y + F_z \cdot q \equiv 0$, din care rezultă $p = -\frac{F_x}{F_z}, q = -\frac{F_y}{F_z}$. Aplicăm (6.18) și obținem

$$(6.19) \quad E = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, G = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}, \Delta = 1 + \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_z^2}.$$

§7. Aplicații ale formei I-a fundamentale

Fie o suprafață $S = h(U)$ cu U mulțime deschisă în \mathbb{R}^2 , un punct $P \in S$ și $T_P S$ spațiul tangent în P la S .

După definiția 6.1 perechea $(T_P S, g_P)$ este un spațiu vectorial euclidian (de dimensiune 2). Așadar putem vorbi de lungimea unui vector $X_P \in T_P S$:

$$(7.1) \quad \|X_P\| = \sqrt{g_P(X_P, X_P)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(P) X^i X^j},$$

precum și de unghiul a doi vectori $X_P, Y_P \in T_P S$:

$$(7.2) \quad \cos \angle(X_P, Y_P) = \frac{g_P(X_P, Y_P)}{\|X_P\| \|Y_P\|} = \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(P) X^i Y^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(P) X^i X^j} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(P) Y^i Y^j}}$$

Fie o curbă pe suprafața S de ecuație

$$(7.3) \quad \vec{r} = \vec{h}(u^1(t), u^2(t)), \quad t \in [a, b].$$

Vectorul tangent ei $\frac{d\vec{r}}{dt}$ are în baza (\vec{h}_1, \vec{h}_2) din $T_P S$ coordonatele

$\left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right)$ și deci $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}$. Rezultă că lungimea acestei curbe este

$$(7.4) \quad L = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} dt,$$

unde coeficienții (g_{ij}) sunt calculați în punctul $(u^1(t), u^2(t))$.

Funcția lungime de arc este în acest caz

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{g_{11} \left(\frac{du^1}{d\tau} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{d\tau} \frac{du^2}{d\tau} + g_{22} \left(\frac{du^2}{d\tau} \right)^2} d\tau,$$

iar diferențiala ei la pătrat este

$$(7.5) \quad ds^2 = \phi(P, du) = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

Așadar, forma I-a fundamentală apare și ca pătratul diferențialei funcției lungime de arc. Aceasta este o interpretare geometrică a formei I-a fundamentale.

Fie două curbe pe S care trec prin punctul $P(u_0^1, u_0^2)$ la valoarea t_0 a parametrului, de ecuații

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{h}(u^1(t), u^2(t)), \\ \vec{r} &= \vec{h}'(u^{1'}(t), u^{2'}(t)), \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Prin definiție, unghiul curbelor (7.6) în punctul lor de intersecție P , este unghiul vectorilor tangenți celor două curbe în punctul P . Acești vectori au componentele $\left(\frac{du^1}{dt}(t_0), \frac{du^2}{dt}(t_0) \right)$ și respectiv $\left(\frac{du^{1'}}{dt}(t_0), \frac{du^{2'}}{dt}(t_0) \right)$.

După (7.2), unghiul lor θ este dat de formula

$$(7.7) \quad \cos \theta = \frac{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^{j'}}{dt}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^{i'}}{dt} \frac{du^{j'}}{dt}}}.$$

După o simplificare prin $(dt)^2$, obținem formula care dă unghiul a două direcții pe S în $P(u_0^1, u_0^2)$.

Ca aplicație, să calculăm unghiul φ al curbelor $u^1 = \text{const}$ și $u^2 = \text{const}$. Avem $du^1 = 0$ și du^2 oarecare, respectiv $du^{1'} = 0$ oarecare și $du^{2'} = 0$. Formula (7.7) ne dă

$$(7.8) \quad \cos \varphi = \frac{g_{12} du^2 du^{2'}}{\sqrt{g_{22} (du^2)^2} \sqrt{g_{11} (du^{2'})^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Doi vectori tangenți în $P \in S$ sunt ortogonali dacă unghiul lor are măsura $\frac{\pi}{2}$. Două direcții tangente în $P \in S$ sunt ortogonale dacă unghiul lor are măsura $\frac{\pi}{2}$. Două curbe prin $P \in S$, situate pe S sunt ortogonale dacă unghiul vectorilor tangenți lor în P are măsura $\frac{\pi}{2}$.

Formula (7.8) ne arată că liniile parametrice sunt ortogonale dacă și numai dacă $g_{12} = 0, (F = 0)$ pe U .

Fie D o submulțime compactă în U și $h(D) = D \subset S$ imaginea sa în S . Notăm prin A aria mulțimii D .

În unele manuale de Analiză matematică se demonstrează riguros următoarea formulă de calcul a ariei A :

$$(7.9) \quad A = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2,$$

sau, în notații clasice,

$$(7.9') \quad A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_D \sqrt{\Delta} dudv.$$

Formula (7.9) poate fi intuită prin următoarele considerații. Fie pe S rețeaua liniilor parametrice. Aceasta împarte mulțimea D în patrulatere curbilinii ca în Fig. 24.

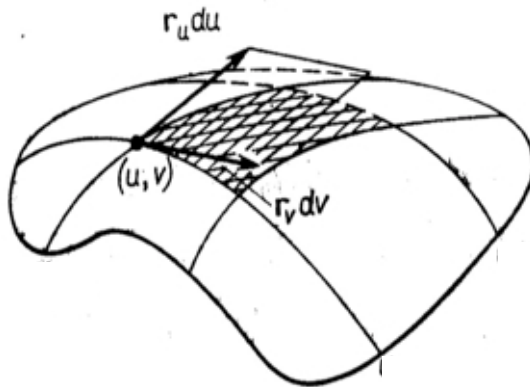


Fig. 24

Aproximăm aria unui asemenea patrulater cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{r}_u du$ și $\vec{r}_v dv$, adică cu numărul

$$dA = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv = \sqrt{\Delta} dudv.$$

Aria A va fi “suma” ariilor acestor paralelograme “infinitesimale”, sumă care este dată de $\iint_D \sqrt{\Delta} dudv$.

§8. Formulele lui Gauss. Formulele lui Weingarten.

Fie suprafața S reprezentată parametric prin

$$(8.1) \quad \vec{r} = \vec{h}(u^1, u^2), \quad \vec{h}_1 \times \vec{h}_2 \neq \vec{0} \quad \forall (u^1, u^2) \in D \text{ mulțime deschisă în } \mathbb{R}^2.$$

Fie $P \in S$. Reperul $\{P, (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N})\}$, unde $\vec{N} = \frac{\vec{h}_1 \times \vec{h}_2}{\|\vec{h}_1 \times \vec{h}_2\|}$, cu P variabil, este

un *reper mobil* pe S , numit *reperul lui Gauss*. Pentru a studia variația acestui reper vom exprima vectorii $\frac{\partial \vec{h}_1}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{h}_1}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{h}_2}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{h}_2}{\partial u^2}$ în reperul lui Gauss și vom obține

formulele lui Gauss. Exprimarea vectorilor $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^1}$ și $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^2}$ în reperul lui Gauss va conduce la formulele lui Weingarten. Ne ocupăm, pe rând, de stabilirea acestor formule. Notăm $\vec{h}_{ij} := \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \vec{h}_{ji}$ ($i, j = 1, 2$) și descompunem acești vectori în baza $(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N})$ în forma următoare

$$(FG) \quad \vec{h}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \vec{h}_k + b_{ij} \vec{N}, \quad i, j = 1, 2,$$

unde funcțiile Γ_{ij}^k și b_{ij} de (u^1, u^2) urmează a fi determinate.

Prin înmulțire scalară cu \vec{N} în (FG), având în vedere că $\langle \vec{N}, \vec{h}_k \rangle = 0$, $k = 1, 2$ și $\vec{N}^2 = 1$, obținem

$$(8.2) \quad b_{ij} = \langle \vec{h}_{ij}, \vec{N} \rangle = \frac{1}{\|\vec{h}_1 \times \vec{h}_2\|} (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_{ij}),$$

unde $\Delta = \vec{h}_1^2 \cdot \vec{h}_1^2 - \langle \vec{h}_1, \vec{h}_2 \rangle^2$.

În notațiile lui Gauss: $b_{11} := L$, $b_{12} = b_{21} := M$, $b_{22} := N$, dacă revenim la parametrizarea (u, v) , vom scrie

$$(8.2') \quad L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}), M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}), N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}).$$

Vom determina acum funcțiile Γ_{ij}^k .

Înmulțim scalar în (FG) cu \vec{h}_m , $m = 1, 2$. Obținem

$$\langle \vec{h}_{ij}, \vec{h}_m \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \vec{h}_k, \vec{h}_m \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Cu i, j fixați, sistemul

$$(8.3) \quad \sum_k g_{km} \Gamma_{ij}^k = \langle \vec{h}_m, \vec{h}_{ij} \rangle,$$

în necunoscutele Γ_{ij}^1 și Γ_{ij}^2 are soluție unică pentru că

$$\det(g_{mk}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \Delta \neq 0. \quad \text{Așadar putem obține pe rând}$$

$(\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2), (\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2)$ și $(\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2)$ rezolvând trei sisteme de tipul (8.3), funcție de (g_{mk}) și $\langle \vec{h}_m, \vec{h}_{ij} \rangle$.

Există un procedeu, pe care-l descriem acum, de a determina simultan toate cele 6 funcții Γ_{ij}^k .

Prin derivarea relației $g_{ik} = \langle \vec{h}_i, \vec{h}_k \rangle$ în raport cu u^j obținem

$$(i) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \langle \vec{h}_{ij}, \vec{h}_k \rangle + \langle \vec{h}_i, \vec{h}_{kj} \rangle, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Permutăm ciclic i, j, k în (i) și obținem

$$(ii) \quad \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} = \langle \vec{h}_{jk}, \vec{h}_i \rangle + \langle \vec{h}_j, \vec{h}_{ik} \rangle,$$

$$(iii) \quad \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} = \langle \vec{h}_{ki}, \vec{h}_j \rangle + \langle \vec{h}_k, \vec{h}_{ji} \rangle.$$

Înmulțim una din ecuațiile (i), (ii), (iii) cu -1, fie de exemplu (iii), și le adunăm membru cu membru. Obținem

$$(8.4) \quad \langle \vec{h}_i, \vec{h}_{jk} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) := [jk; i].$$

Funcțiile notate prin $[jk; i]$ se numesc simbolii Christoffel de specia I-a.

Observăm simetria lor în indicii j, k . Sistemul (8.3) devine

$$(8.3') \quad \sum_k g_{mk} \Gamma_{ij}^k = [ij; m].$$

Fie (g^{mn}) matricea inversă matricii (g_{ni}) , adică avem

$$\sum_{n=1}^2 g^{mn} g_{ni} = \delta_i^m = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = m \\ 0 & \text{pentru } i \neq m. \end{cases}$$

Înmulțim în (8.3') cu g^{nm} și sumăm după m . Rezultă

$$\sum_{k,m=1}^2 g^{nm} g_{mk} \Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^2 g^{nm} [ij; m] \text{ sau } \Gamma_{ij}^n = \sum_{m=1}^2 g^{nm} [ij; m].$$

Așadar am obținut

$$(8.5) \quad \Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{nm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right), \quad i, j, n, m = 1, 2.$$

Funcțiile Γ_{ij}^n date de (8.5) se numesc simbolii lui Christoffel de specia a II-a.

Formulele (8.5) justifică

Propoziția 8.1. *Funcțiile Γ_{ij}^k se exprimă numai cu funcțiile (g_{ij}) și derivatele lor de ordinul I.*

Formulele (FG) cu funcțiile (Γ_{ij}^k) date de (8.5) și funcțiile (b_{ij}) date de (8.2) se numesc *formulele lui Gauss*.

Stabilim acum formulele lui Weingarten. Notăm $\vec{N}_i := \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^i}$ $i = 1, 2$ și descompunem acești vectori în baza $(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N})$ astfel:

$$(8.6) \quad \vec{N}_i = - \sum_{j=1}^2 A_i^j \vec{h}_j + \alpha \vec{N}, \quad i = 1, 2,$$

unde funcțiile A_i^j și α de variabilele (u^1, u^2) urmează a fi determinate.

Înmulțim scalar (8.6) cu \vec{N} și avem în vedere că $\vec{N}^2 = 1$, $\langle \vec{N}_i, \vec{N} \rangle = 0$ și $\langle \vec{N}, \vec{h}_j \rangle = 0$. Obținem $\alpha = 0$.

Înmulțim scalar (8.6) cu \vec{h}_k ($k = 1, 2$) și rezultă $-\sum_{j=1}^2 A_i^j g_{jk} = \langle \vec{N}_i, \vec{h}_k \rangle$. Prin derivarea egalității $\langle \vec{h}_k, \vec{N} \rangle = 0$ în raport cu (u^i) , obținem $\langle \vec{N}_i, \vec{h}_k \rangle = -\langle \vec{h}_{ik}, \vec{N} \rangle = -b_{ik}$ și deci

$$(8.7) \quad \sum_{j=1}^2 g_{kj} A_i^j = b_{ki}, \quad i, k = 1, 2.$$

În (8.7) avem 4 ecuații care, grupate convenabil câte două, formează două sisteme liniare, fiecare cu matricea (g_{kj}) care este nesară și deci cele patru

funcții (A_i^j) sunt unic determinate. Pentru a găsi unitar expresia acestor funcții, înmulțim în (8.7) cu g^{hk} și sumăm după k . Rezultă: $\sum_{k,j=1}^2 g^{hk} g_{kj} A_i^j = \sum_k g^{hk} b_{ki}$ sau, având în vedere că $\sum_k g^{hk} g_{kj} = \delta_j^h$,

$$(8.8) \quad A_i^h = \sum_{k=1}^2 g^{hk} b_{ki}.$$

Formulele

$$(FW) \quad \overrightarrow{N}_i = - \sum_{j=1}^2 A_i^j \overrightarrow{h}_j,$$

cu funcțiile (A_i^j) date de (8.8) se numesc *formulele lui Weingarten*.

Definim operatorul liniar Weingarten $A: T_p S \rightarrow T_p S$ prin $A \overrightarrow{h}_i = \sum_{j=1}^2 A_i^j \overrightarrow{h}_j$,

cu alte cuvinte (A_i^j) este matricea operatorului A în baza $(\overrightarrow{h}_1, \overrightarrow{h}_2)$.

Propoziția 8.2. *Operatorul Weingarten A este autoadjunct în raport cu g , adică are loc egalitatea*

$$(8.9) \quad g(AX, Y) = g(X, AY), \quad X, Y \in T_p S.$$

Demonstrație. Este suficient să verificăm (8.9) pentru $X = \overrightarrow{h}_i$ și $Y = \overrightarrow{h}_j$.

Avem, în baza egalităților (8.8), $g(\overrightarrow{A h}_i, \overrightarrow{h}_j) = g\left(\sum_{k=1}^2 A_i^k \overrightarrow{h}_k, \overrightarrow{h}_j\right) = \sum_{k=1}^2 A_i^k g_{kj} = b_{ij}$. Pe de

altă parte, $g(\overrightarrow{h}_i, \overrightarrow{A h}_j) = g\left(\overrightarrow{h}_i, \sum_{k=1}^2 A_j^k \overrightarrow{h}_k\right) = \sum_{k=1}^2 A_j^k g_{ki} = b_{ji}$ în baza acelorași egalități (8.8). Cum $b_{ij} = b_{ji}$, (8.9) are loc.

§9. Forma a II-a fundamentală a unei suprafețe

Continuăm să studiem suprafața S reprezentată parametric, utilizând rezultatele stabilite mai sus.

Definiția 9.1. *Aplicația $b_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin formula*

$$(9.1) \quad b_p(X, Y) = g_p(AX, Y), \quad \forall X, Y \in T_p S,$$

se numește forma a II-a fundamentală a suprafeței S în punctul P . Aplicația $P \rightarrow b_p$ se numește forma a II-a fundamentală a suprafeței S .

Aplicația b_p este o formă biliniară pentru că A este operator liniar și g_p este formă biliniară. Pe baza egalității (8.9), forma biliniară b_p este simetrică. Matricea ei în baza (\vec{h}_1, \vec{h}_2) este $b_p(\vec{h}_i, \vec{h}_j) = g_p(A\vec{h}_i, \vec{h}_j) = b_{ij}$, după cum rezultă în demonstrația Propoziției 8.2. Așadar putem scrie b_p și în forma următoare

$$(9.2) \quad b_p(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} X^i Y^j, \text{ pentru } X = \sum_{i=1}^2 X^i \vec{h}_i, Y = \sum_{j=1}^2 Y^j \vec{h}_j.$$

Observație. Aplicația b_p are caracter geometric. Matricea formei biliniare

$$b_p \text{ are determinantul } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

Definiția 9.2. Punctele suprafeței S în care avem $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ (respectiv $= 0, > 0$) se numesc **puncte hiperbolice** (respectiv **parabolice, eliptice**).

Forma pătratică asociată lui b_p , adică

$$(9.3) \quad b_p(X) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} X^i X^j, X = \sum_{i=1}^2 X^i \vec{h}_i,$$

se numește, de asemenea, forma a II-a fundamentală a suprafeței S .

Fie $du = (du^1, du^2)$ o direcție tangentă suprafeței S . Forma pătratică

$$(9.4) \quad \Psi(P, du) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} du^i du^j = b_{11} (du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} (du^2)^2$$

se numește, de asemenea, forma a II-a fundamentală a suprafeței.

În notațiile lui Gauss, forma a II-a fundamentală se scrie

$$(9.5) \quad \Psi(P, du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

în care L, M, N sunt funcții de u și v .

Căutăm expresiile formei a II-a fundamentale în celelalte două reprezentări posibile ale suprafeței S . În acest scop continuăm considerațiile și calculele care ne-au condus la expresiile coeficienților formei I-a fundamentale în reprezentarea explicită și respectiv în reprezentarea implicită a suprafeței S . Reprezentarea parametrică $\vec{r}(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot, \cdot(\cdot, \cdot))$ care provine din reprezentarea explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, ne-a condus la $\vec{r}_u = (1, 0, p)$, $\vec{r}_v = (0, 1, q)$. Derivând în continuare obținem $\vec{r}_{uu} = (0, 0, r)$, $\vec{r}_{uv} = (0, 0, s)$, $\vec{r}_{vv} = (0, 0, t)$, unde $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$ în notații Monge.

Formulele de calcul ale coeficienților L, M, N conduc în această reprezentare la formulele

$$(9.6) \quad L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Determinantul matricei formei a II-a fundamentale este $\frac{rs-t^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

În situația în care suprafața S este reprezentată implicit prin ecuația $F(x, y, z) = 0$, cu condiția $F_z \neq 0$, pe o submulțime deschisă în \mathbb{R}^3 , se poate obține reprezentarea explicită $z = f(x, y)$ și am văzut mai sus că

$$p = -\frac{F_x}{F_z}, q = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Derivăm p și q în raport cu x și y pentru a obține derivatele r, s, t . După calcule, rezultă următoarele expresii ale coeficienților formei a II-a fundamentale

$$(9.7) \quad L = \frac{F_x F_{xz} - F_{xx} F_z}{|F_z| \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, M = \frac{F_x F_{yz} - F_{xy} F_z}{|F_z| \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, N = \frac{F_y F_{yz} - F_{yy} F_z}{|F_z| \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

Coeficienții formei a II-a fundamentale decid forma suprafeței în vecinătatea unui punct al suprafeței. Aceasta rezultă din următoarele considerații.

Fie un punct P al suprafeței elementare S reprezentată explicit prin ecuația $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Alegem reperul \mathfrak{R} din E^3 încât originea sa O să fie P iar axa Oz să coincidă cu normala în P la suprafața S . Condiția ca vectorul normal unitar $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p, -q, 1)$ să coincidă cu \vec{k} ne dă că $p = q = 0$ în punctul $P(0, 0, 0)$.

Coeficienții formei a II-a fundamentale sunt dați de (9.6). Dezvoltăm funcția $z = f(x, y)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $(0, 0)$. Obținem

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \dots$$

Rezultă că în vecinătatea lui P suprafața S diferă foarte puțin de quadrica de ecuație

$$(9.8) \quad z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

Această quadrică este un paraboloid eliptic dacă $rt - s^2 > 0$, un paraboloid hiperbolic dacă $rt - s^2 < 0$ și cilindru parabolic dacă $rt - s^2 = 0$, cu $r \neq 0$ sau $t \neq 0$. Așadar, în vecinătatea unui punct eliptic suprafața diferă foarte puțin de un paraboloid eliptic, în vecinătatea unui punct hiperbolic suprafața diferă foarte puțin de un paraboloid hiperbolic iar în vecinătatea unui punct parabolic în care $L \neq 0$ sau $N \neq 0$, suprafața diferă foarte puțin de un cilindru parabolic.

Această situație explică termenii punct eliptic, punct hiperbolic și, respectiv, punct parabolic. Nu putem spune nimic despre forma suprafeței în vecinătatea punctelor parabolice în care $L = N = 0$ și deci $M = 0$. Ea poate fi foarte complicată, dată de termenii de gradul 3 în dezvoltarea în serie Taylor a funcției z .

§10. Curburi principale. Curbură totală. Curbură medie.

Definiția 10.1. Aplicația $k_n : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$(10.1) \quad k_n(X) = \frac{b(X, X)}{g(X, X)}, \quad X \in T_p S, \quad X \neq 0,$$

se numește curbură normală a suprafeței în punctul $P \in S$.

Cu $X = \sum X^i \vec{h}_i$, valoarea funcției curbură normală în X , numită simplu curbură normală se scrie

$$(10.2) \quad k_n(X) = \frac{\sum b_{ij} X^i X^j}{\sum g_{ij} X^i X^j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Vectorul $X = (X^1, X^2)$ se numește vector principal dacă el este punct critic pentru curbură normală k_n . Valoarea curburii normale pentru un vector principal notată prin κ se numește curbură principală.

Condiția ca vectorul tangent $X = (X^1, X^2)$ să fie punct critic pentru k_n se scrie $\frac{\partial k_n}{\partial X^1} = 0, \frac{\partial k_n}{\partial X^2} = 0$.

Prin derivare în expresia (10.2) această condiție se scrie în forma

$$(10.3) \quad \begin{aligned} (b_{11}X^1 + b_{12}X^2) \left(\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j \right) &= (g_{11}X^1 + g_{12}X^2) \left(\sum_{i,j} b_{ij} X^i X^j \right) \\ (b_{12}X^1 + b_{22}X^2) \left(\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j \right) &= (g_{12}X^1 + g_{22}X^2) \left(\sum_{i,j} b_{ij} X^i X^j \right) \end{aligned}$$

Acest sistem este echivalent cu

$$(10.4) \quad \frac{b_{11}X^1 + b_{12}X^2}{g_{11}X^1 + g_{12}X^2} = \frac{b_{12}X^1 + b_{22}X^2}{g_{12}X^1 + g_{22}X^2} = \kappa,$$

unde κ este valoarea curburii normale pentru vectorul X , adică avem

$$\kappa(P, X) = \frac{b(X, X)}{g(X, X)}.$$

Ecuatiile (10.4) se mai pot scrie în forma următoare

$$(10.5) \quad \sum_j (b_{ij} - \kappa g_{ij}) X^j = 0, \quad i = 1, 2.$$

Vom folosi această formă pentru a demonstra

Propoziția 10.1. *Un vector X este principal dacă și numai dacă este vector propriu pentru operatorul Weingarten, corespunzător valorii proprii κ (curbură principală).*

Demonstrație. Ecuația matricială $AX = \lambda X$ care dă vectorii proprii ai operatorului Weingarten, se scrie în baza (\bar{h}_1, \bar{h}_2) astfel:

$$\begin{aligned} A \left(\sum_i X^i \bar{h}_i \right) &= \lambda \sum_i X^i \bar{h}_i \Leftrightarrow \sum_{i,j} X^i A_i^j \bar{h}_j = \lambda \sum_j X^j \bar{h}_j \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_j A_i^j X^i = \lambda X^j \Leftrightarrow \sum_{i,j} g^{jk} b_{ki} X^i = \lambda X^j \end{aligned}$$

Înmulțim ultima expresie cu g_{sj} și sumăm după j . Rezultă $\sum_i b_{si} X^i = \lambda \sum_j g_{sj} X^j$ sau, după schimbări permise de indici $\sum_j (b_{ij} - \lambda g_{ij}) X^j = 0$, ecuație care pentru $\lambda = \kappa$ este exact (10.5). ■

Pe baza Propoziției 10.1 demonstrăm

Propoziția 10.2. *Vectorii principali corespunzători la curburi principale distincte sunt ortogonali.*

Demonstrație. Fie $AX_1 = \kappa_1 X_1$ și $AX_2 = \kappa_2 X_2$ cu $\kappa_1 \neq \kappa_2$ și $\kappa_1 \neq 0$.

$$\text{Avem } g(X_1, X_2) = \frac{1}{\kappa_1} g(AX_1, X_2) = \frac{1}{\kappa_1} g(X_1, AX_2) = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} g(X_1, X_2).$$

Pentru $\kappa_2 = 0$, obținem $g(X_1, X_2) = 0$. Pentru $\kappa_2 \neq 0$, rezultă $\left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) g(X_1, X_2) = 0$,

deci, din nou, $g(X_1, X_2) = 0$.

În cazul în care $\kappa_1 = 0$ și $\kappa_2 \neq 0$, putem scrie

$$g(X_1, X_2) = \frac{1}{\kappa_2} g(X_1, AX_2) = \frac{1}{\kappa_2} g(AX_1, X_2) = 0. \quad \blacksquare$$

Amintim că se numește **curbură principală** valoarea curburii normale pentru un vector principal.

Am văzut că ecuațiile care dau vectorii principali sunt (10.5). Aceste ecuații constituie un sistem liniar și omogen în (X^1, X^2) și, pentru a exista vectori principali, în mod necesar determinantul acestui sistem trebuie să fie egal cu zero. Așadar curburi principale sunt date de ecuația

$$(10.6) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - \kappa g_{11} & b_{12} - \kappa g_{12} \\ b_{21} - \kappa g_{21} & b_{22} - \kappa g_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ sau}$$

$$(10.6') \quad (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\kappa^2 - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11})\kappa + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0.$$

Propoziția 10.3. *Ecuția (10.6) are soluții reale.*

Demonstrație. Alegem o parametrizare a suprafeței S în care $g_{12} = 0$. Discriminantul ecuației (10.6), ecuație de gradul II în κ , este $(g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2 + 4b_{12}^2 \geq 0$ cu egalitate dacă și numai dacă $b_{12} = 0$, $g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22} = 0$. Așadar soluțiile ecuației (10.6) sunt reale. Soluțiile k_1, k_2 sunt confundate dacă $\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}}$. Vom numi planare punctele în care $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ și ombilicale punctele în care $\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{R}$, $R \neq 0$. Deci în puncte planare avem $k_1 = k_2 = 0$ iar în puncte ombilicale avem $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$.

Definiția 10.2. *Fie $P \in S$ și κ_1, κ_2 curbura principală în punctul P .*

Numărul real $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ se numește curbura totală a suprafeței în P .

Numărul real $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ se numește curbura

medie a suprafeței în P .

Fiecărui punct P al suprafeței S putem să-i asociem curbura totală a suprafeței în P și curbura medie a suprafeței în P . Obținem astfel două funcții reale pe S , numite funcții curbura totală și respectiv funcția curbura medie.

Semnul funcției K este dat de natura punctelor suprafeței. Avem $K < 0$ în puncte hiperbolice, $K = 0$ în puncte parabolice și $K > 0$ în puncte eliptice. Punctele planare sunt parabolice iar cele ombilicale sunt puncte eliptice. Situația acestor două categorii de puncte este clarificată în următoarele două propoziții.

Propoziția 10.4. *Planul are toate punctele planare. Dacă o suprafață conexă are toate punctele planare, atunci ea este o regiune conexă a unui plan.*

Demonstrație. Prima afirmație se verifică ușor prin calcul, considerând ecuațiile planului de forma: $x = u, y = v, z = 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Fie S o suprafață conexă cu $b_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$. Rezultă $A_j^i = 0$ și, din formulele lui Weingarten, urmează $\vec{N}_j = \vec{0}$, adică $\vec{N} = \vec{N}_0$ (constant).

Considerăm funcția $\langle \vec{N}_0, \vec{h}(u^1, u^2) \rangle$ pe care o derivăm în raport cu u^1 și u^2 . Rezultă: $\frac{\partial \langle \vec{N}_0, \vec{h} \rangle}{\partial u^j} = \langle \vec{N}_0, \vec{h}_j \rangle = 0$. Așadar $\langle \vec{N}_0, \vec{h} \rangle = -D$ (constanta reală). Cu $\vec{N}_0 = (A, B, C)$ obținem $Ax(u^1, u^2) + By(u^1, u^2) + Cz(u^1, u^2) + D = 0$. Deci punctul $P(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$ de pe suprafața S se află în planul de ecuație $Ax + By + Cz + D = 0$. ■

Fie suprafața S sferă de centru O și rază R . Prin calcul direct, folosind parametrizări de forma

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \theta, \end{cases} \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi$$

se constată că punctele sferei sunt ombilicale cu $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}$ și deci curbura totală

$K = \frac{1}{R^2}$, este constantă.

Propoziția 10.5. *O suprafață conexă cu toate punctele ombilicale este o regiune conexă pe o sferă.*

Demonstrație. Fie suprafața S cu toate punctele ombilicale, adică

$$(10.7) \quad b_{ij}(u^1, u^2) = \lambda(u^1, u^2) g_{ij}(u^1, u^2) \text{ cu } \lambda \text{ funcție nicăieri zero.}$$

Vom arăta mai întâi că $\lambda = \text{const.} \neq 0$.

Scriem (10.7) în forma $\langle \vec{N}, \vec{h}_{ij} \rangle = \lambda \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle$ și o derivăm parțial în raport cu u^k . Obținem $\langle \vec{N}_k, \vec{h}_{ij} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{h}_{ij,k} \rangle = \lambda_{,k} \langle \vec{h}_i, \vec{h}_j \rangle + \lambda \langle \vec{h}_{ik}, \vec{h}_j \rangle + \lambda \langle \vec{h}_i, \vec{h}_{jk} \rangle$, unde

$\lambda_{,k} = \frac{\partial \lambda}{\partial u^k}$. Din (10.7) rezultă imediat că $A_j^i = \lambda \delta_j^i$ și formulele lui Weingarten devin

$\vec{N}_j = -\lambda \vec{h}_j$. Acestea ne permit să scriem egalitatea precedentă în forma:

$$\lambda_{,k} g_{ij} = -\lambda \langle \vec{h}_k, \vec{h}_{ij} \rangle - \lambda \langle \vec{h}_j, \vec{h}_{ik} \rangle - \lambda \langle \vec{h}_i, \vec{h}_{jk} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{h}_{ij,k} \rangle.$$

Având în vedere că $\vec{h}_{ij,k} = \vec{h}_{ik,j} = \frac{\partial^3 h}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$, obținem

$$(10.8) \quad \lambda_{,k} g_{ij} = \lambda_{,j} g_{ik}.$$

Înmulțim în (10.8) prin g^{ik} și sumăm după i și k . Avem în vedere că $\sum_i g^{ik} g_{ij} = \delta_j^k$ și $\sum_{i,k} g^{ik} g_{ik} = 2$. Obținem $\lambda_{,j} = 2\lambda_{,j}$, adică $\lambda_{,j} = 0$, deci $\lambda = \text{const.}$

Revenind la formulele lui Weingarten, constatăm că putem să le scriem în forma $\frac{\partial}{\partial u^j}(\vec{N} + \lambda \vec{h}) = 0$ de unde rezultă că $\vec{N} + \lambda \vec{h} = \vec{a}$ (constant).

Echivalent, $\vec{h} - \frac{1}{\lambda} \vec{a} = -\frac{1}{\lambda} \vec{N}$. De aici urmează $\left(\vec{h} - \frac{1}{\lambda} \vec{a}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Deci punctul lui S de vector de poziție \vec{h} este pe sfera de centru $C\left(\frac{\vec{a}}{\lambda}\right)$ și rază $\frac{1}{\lambda}$. ■

§11. Ecuațiile lui Gauss. Ecuațiile Peterson – Mainardi – Codazzi. Curbură Riemanniană

Formulele lui Gauss (FG) și formulele lui Weingarten (FW), introduse în §8, pot fi privite, luate la un loc, ca un sistem de ecuații cu derivate parțiale în necunoscutele, funcții vectoriale, $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N}$. Condițiile de integrabilitate ale acestui sistem sunt

$$(11.1) \quad \frac{\partial \vec{h}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \vec{h}_{ik}}{\partial u^j} \left(= \frac{\partial^3 \vec{h}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} \right)$$

$$(11.1') \quad \frac{\partial \vec{N}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \vec{N}_j}{\partial u^i}.$$

Detaliem aceste condiții de integrabilitate. Avem:

$$\vec{h}_{ijk} = \sum_s \left(\Gamma_{ij,k}^s \vec{h}_s + \Gamma_{ij}^s \vec{h}_{sk} \right) + b_{ij,k} \vec{N} + b_{ij} \vec{N}_k,$$

unde prin $,k$ am notat derivata în raport cu (u^k) .

Folosim din nou formulele (FG) și (FW). Obținem

$$\vec{h}_{ijk} = \sum_s \left(\Gamma_{ij,k}^s + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - b_{ij} A_k^s \right) \vec{h}_s + \left(b_{ij,k} + \sum_s \Gamma_{ij}^s b_{rk} \right) \vec{N}.$$

Schimbăm indicii j și k între ei. Obținem și \vec{h}_{ikj} . Înlocuim acestea în (11.1). Avem în vedere că \vec{h}_1, \vec{h}_2 și \vec{N} sunt vectori liniar independenți. Rezultă că (11.1) este echivalentă cu următoarele două ecuații:

$$(11.2) \quad \Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \sum_r \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s + b_{ik} A_j^s - b_{ij} A_k^s = 0$$

$$(11.3) \quad b_{ij,k} - b_{ik,j} + \sum_r \Gamma_{ij}^r b_{rk} - \sum_r \Gamma_{ik}^r b_{rj} = 0.$$

Notăm

$$(11.4) \quad R_{i \ jk}^s = \Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \sum_r (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s).$$

Se spune că sistemul de funcții de $u^1, u^2, (R_{i \ jk}^s)$, în număr de 16, nu toate distincte, constituie **tensorul de curbură** al suprafeței. Cu această notație, ecuația (11.2) devine

$$(11.2') \quad R_{i \ jk}^s = b_{ij} A_k^s - b_{ik} A_j^s.$$

Înmulțim în (11.2') cu g_{sh} și sumăm după s . Notăm

$$(11.4') \quad R_{ihjk} := \sum_s g_{hs} R_{i \ jk}^s.$$

Avem în vedere că $\sum_s A_k^s g_{sh} = b_{kh}$. Rezultă

$$(11.5) \quad R_{ihjk} = b_{ij} b_{hk} - b_{ik} b_{hj}, \quad i, j, k, h = 1, 2.$$

Ecuația (11.5) sau forma echivalentă (11.2) se numește **ecuația lui Gauss**.

Setul de funcții (R_{ihjk}) constituie tensorul de curbură Riemanniană a suprafeței S . În acest set sunt 16 funcții dar nu sunt toate distincte pentru că din (11.5) rezultă imediat proprietățile

- (i) $R_{ihjk} = -R_{ihkj},$
- (ii) $R_{hijk} = -R_{ihjk},$
- (iii) $R_{ihjk} + R_{ikjh} + R_{ikhj} = 0$ (sumare ciclică după j, k, h),
- (iv) $R_{ihjk} = R_{jkih}.$

Pe baza acestor proprietăți rezultă că în setul de funcții (R_{ihjk}) , $i, j, k, h = 1, 2$, avem 12 funcții nule iar din cele 4, în general nenule, una singură este esențială R_{1212} , celelalte fiind una egală cu ea și celelalte două de semn contrar. Așadar ecuația (11.5) a lui Gauss se reduce la

$$(11.5') \quad R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12}^2.$$

Funcția R_{1212} se calculează din (11.4'), având în vedere notația (11.4). Ne amintim că funcțiile (Γ_{ij}^k) se calculează cu ajutorul funcțiilor (g_{ij}) și derivatelor parțiale $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$, $i, j, k = 1, 2$. Așadar R_{1212} depinde numai de funcțiile (g_{ij}) și derivatele parțiale de ordin I și II ale lor.

Formula curburii totale se poate rescrie, în baza ecuației (11.5') în forma

$$(11.6) \quad K = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Formula (11.6) conduce la un rezultat important.

Teorema 11.1. *Curbura totală a unei suprafețe depinde numai de forma I-a fundamentală a suprafeței.*

Într-adevăr, deși curbura totală a fost definită în legătură cu ambele forme fundamentale și forma ei inițială conține și coeficienți (b_{ij}) , formula (11.6) ne arată că ea depinde numai de funcțiile (g_{ij}) și derivatele lor parțiale până la ordinul II.

Teorema 11.1 este cunoscută sub denumirea de **Teorema Egregium sau Teorema minunată** a lui Gauss.

Revenim la ecuațiile (11.3). Observăm că 4 din cele 8 ecuații (11.3) și anume cele cu $j=k$, $i=1$ sau 2 sunt identități. Din cele 4 rămase două sunt esențiale, celelalte două diferă de ele prin semn, și anume

$$(11.7) \quad \begin{cases} b_{11,2} - b_{12,1} = \sum_s (\Gamma_{12}^s b_{s1} + \Gamma_{11}^s b_{s2}), \\ b_{12,2} - b_{22,1} = \sum_s (\Gamma_{22}^s b_{s1} + \Gamma_{12}^s b_{s2}). \end{cases}$$

Ecuațiile (11.7) se numesc **ecuațiile Peterson – Mainardi – Codazzi** (PMC).

Fiind dată o suprafață S putem determina cele două forme fundamentale ale ei, prima fiind și pozitiv definită. Coeficienții acestor forme sunt legați prin ecuațiile lui Gauss și ecuațiile PMC. Se poate arăta că cele două forme fundamentale determină suprafața până la o deplasare în spațiu, în sensul următoarei teoreme, numită și teorema fundamentală a geometriei suprafețelor în E^3 .

Teorema lui Bonnet. *Fie $U = \{(u^1, u^2)\}$ un domeniu conex și simplu conex în \mathbb{R}^2 . Presupunem că g_{ij} și b_{ij} , $i, j=1,2$ sunt funcții diferențiabile date pe U care satisfac*

- (i) $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{ij} \xi^i \xi^j \geq 0$ cu egalitate dacă și numai dacă $0 = (\xi^i) \in \mathbb{R}^2$,
- (ii) $b_{ij} = b_{ji}$,
- (iii) *ecuația Gauss, (11.5') și ecuațiile PMC, (11.7).*

Atunci există o imersie $f: U \rightarrow E^3$ încât $f(U) = S$ este suprafață în E^3 pentru care (g_{ij}) sunt coeficienții primei forme fundamentale și (b_{ij}) sunt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale (relativ la parametrizarea definită de f). Această suprafață este unică până la o deplasare în E^3 .

Pentru demonstrație se poate consulta [1, p.140].

CAPITOLUL 4

CURBE REMARCABILE PE O SUPRAFAȚĂ

Rezumat. Se definește curbura normală pentru o direcție (du^1, du^2) tangentă prin

$$\text{formula } k_n = \frac{b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2}.$$
 Direcțiile pentru care k_n ia

valori extreme se numesc direcții principale. O curbă pe suprafața S este linie asimptotică (linie de curbură) dacă direcțiile tangente ei sunt asimptotice (principale). Se stabilesc ecuațiile liniilor asimptotice, ale liniilor de curbură și se evidențiază proprietăți geometrice ale lor. Se asociază unei curbe pe S un reper mobil (Darboux - Ribaucour) format din versorul \bar{T} al vectorului tangent, versorul \bar{N} al normalei la suprafață și $\bar{N}_g = \bar{N} \times \bar{T}$. Variația acestui reper mobil pe curbă este dată de formulele Darboux -

$$\text{Ribaucour: } \frac{d\bar{T}}{ds} = k_g \bar{N}_g + k_n \bar{N}, \frac{d\bar{N}_g}{ds} = -k_g \bar{T} + \tau_g \bar{N}, \frac{d\bar{N}}{ds} = -k_n \bar{T} - \tau_g \bar{N}_g.$$
 Se

introduc astfel doi noi invarianti k_g - curbura geodezică, τ_g - torsiunea geodezică. Condiția $\tau_g = 0$ caracterizează liniile de curbură. Condiția $k_g = 0$ introduce curbele numite geodezice pentru care se dau ecuații și proprietăți geometrice. Invariantii k_g, k_n, τ_g sunt legați de invariantii k și τ prin formulele:

$$k_n = k \cos \theta, k_g = k \sin \theta, \tau_g = \tau + \dot{\theta}, \text{ unde } \theta = \angle(\bar{n}, \bar{N}).$$

§1. Curbură normală. Direcții asimptotice. Linii asimptotice.

În continuare nu vom mai indica punctul în care se evaluează formele I-a și a II-a fundamentale ale suprafeței. El va reieși din context. Amintim:

Definiția 1.1. Aplicația $k_n : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$(1.1) \quad k_n(X) = \frac{b(X, X)}{g(X, X)}, \quad X \in T_p S, \quad X \neq 0,$$

se numește curbura normală a suprafeței în punctul $P \in S$.

Cu $X = \sum X^i \bar{h}_i$, valoarea funcției curbura normală în X , numită simplu curbura normală se scrie

$$(1.2) \quad k_n(X) = \frac{\sum b_{ij} X^i X^j}{\sum g_{ij} X^i X^j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Observăm că are loc $k_n(\lambda X) = k_n(X)$ pentru orice $\lambda \neq 0$ număr real, adică funcția k_n depinde numai de direcția lui X . În particular, putem lua o direcție tangentă $du = (du^1, du^2)$ și scrie

$$(1.3) \quad k_n(P, du) = \frac{\sum b_{ij} du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j}, \quad i, j = 1, 2.$$

În notațiile clasice,

$$(1.3') \quad k_n(P, du, dv) = \frac{\Psi(P, du, dv)}{\Phi(P, du, dv)}.$$

Observăm că pentru P fixat, curbura normală k_n este funcție de direcțiile tangente la S în P .

Ne vor interesa, în cele ce urmează, direcțiile pentru care curbura normală este nulă și cele pentru care ea are valori extreme (minimă, maximă).

Definiția 1.2. O direcție $du = (du^1, du^2)$, tangentă în P la S , se numește *direcție asimptotică* dacă $k_n(P, du) = 0$.

După (1.3), direcția $du = (du^1, du^2)$ este direcție asimptotică dacă și numai dacă

$$(1.4) \quad b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2 = 0.$$

Ecuția (1.4) se numește ecuația direcțiilor asimptotice. Direcția $du = (du^1, du^2)$ este complet definită și de perechea $\left(1, \frac{du^2}{du^1}\right)$. Cu notația $m = \frac{du^2}{du^1}$, ecuația (1.4) se scrie

$$(1.4') \quad m^2 b_{22} + 2b_{12}m + b_{11} = 0.$$

Aceasta este ecuație de gradul II în m . Discriminantul ei fiind $b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$, rezultă:

- (i) în punctele hiperbolice există două direcții asimptotice distincte,
- (ii) în punctele parabolice există o singură direcție asimptotică (două confundate),
- (iii) în punctele eliptice nu există direcții asimptotice.

Definiția 1.3. O curbă pe S se numește *linie asimptotică* sau *asimptotă* dacă vectorul tangent ei are în toate punctele ei direcție asimptotică.

Dacă ecuațiile unei curbe pe S sunt $u^i = u^i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in (a, b)$, vectorul tangent ei este $\sum_{i=1}^2 \frac{du^i}{dt} \vec{h}_i$ și condiția ca acesta să aibă direcție asimptotică este

$$(1.5) \quad b_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + b_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 = 0.$$

Ecuția (1.5) este ecuația diferențială a liniilor asimptotice pe S .

Definiția 1.3 corelată cu rezultatele privind existența direcțiilor asimptotice ne arată că

- (i) printr-un punct hiperbolic trec două linii asimptotice distincte,
- (ii) printr-un punct parabolic trece o linie asimptotică,
- (iii) printr-un punct eliptic nu trece nici o linie asimptotică.

Determinarea liniilor asimptotice, când există, se face prin rezolvarea ecuației (1.5), căutând linia asimptotică în forma, de exemplu, $u^2 = u^2(u^1)$, $u^1 \in (c, d)$.

Ecuția (1.5) devine

$$(1.5') \quad b_{22} \left(\frac{du^2}{du^1} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du^2}{du^1} + b_{11} = 0,$$

ecuație echivalentă cu două (posibil confundate) ecuații diferențiale de ordinul întâi, de forma $\frac{du^2}{du^1} = f(u^1, u^2(u^1))$, integrabile prin cuadraturi.

Pentru a obține caracterizări geometrice ale liniilor asimptotice vom stabili mai întâi expresia vectorului $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ în reperul lui Gauss, pentru $\vec{r} = \vec{h}(u^1(t), u^2(t))$, $t \in (a, b)$, ecuația unei curbe pe S . Știm că avem $\frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^2 \vec{h}_i \frac{du^i}{dt}$. Derivăm din nou, în raport cu t . Obținem:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 u^i}{dt^2} \vec{h}_i + \sum_i \left(\frac{\partial \vec{h}_i}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} \right) \frac{du^i}{dt} = \sum_i \frac{d^2 u^i}{dt^2} \vec{h}_i + \sum_{i,j} \vec{h}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}.$$

Înlocuim \vec{h}_{ij} din formulele lui Gauss și rezultă

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 u^i}{dt^2} \vec{h}_i + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \vec{h}_k + \left(\sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{N},$$

unde însumările se fac după indicii scriși sub semnul \sum , de la 1 la 2. În prima sumă din dreapta schimbăm i cu k (i este indice de însumare), grupăm după \vec{h}_k și obținem

$$(1.6) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_k \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{h}_k + \left(\sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{N}.$$

Observăm că spre deosebire de $\frac{d\vec{r}}{dt}$, vectorul $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ nu este, în general, conținut în spațiul tangent $T_p S$. Acest vector are atât componentă tangențială dată de

$$(1.6') \quad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^T := \left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{h}_1 + \left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{h}_2$$

cât și componentă normală dată de

$$(1.6'') \quad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^\perp := \left(\sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \vec{N}.$$

Din (1.6'') rezultă imediat

Propoziția 1.1. *O curbă C pe S de ecuație $\vec{r} = \vec{h}(u^1(t), u^2(t))$, $t \in (a, b)$*

este linie asimptotică dacă și numai dacă $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^\perp = 0$, adică dacă și numai dacă

vectorul $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ aparține spațiului tangent la S .

Corolar 1.1. *Orice dreaptă pe o suprafață este linie asimptotică.*

Demonstrație. Pentru o dreaptă pe S avem $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$, fapt care atrage

$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^T = 0$ și $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^\perp = 0$. După Propoziția 1.1, acea dreaptă de pe S este linie asimptotică. ■

Are loc următoarea caracterizare a liniilor asimptotice.

Propoziția 1.2. *O curbă pe S este linie asimptotică dacă și numai dacă în fiecare punct al ei planul osculator coincide cu planul tangent suprafeței.*

Demonstrație. Coincidența despre care este vorba se înțelege că are loc în fiecare punct P al curbei. Știm că planul osculator al curbei este determinat de P , $\frac{d\vec{r}}{dt}$ și $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Fie curba linie asimptotică. Atunci, după Propoziția 1.1, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ este, de asemenea, în planul tangent suprafeței, deci planul osculator al curbei coincide cu planul tangent la suprafață. Reciproc, dacă suntem pe o curbă al cărei plan osculator coincide cu planul tangent suprafeței, vectorul $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ din planul ei osculator, fiind și în planul tangent suprafeței, va avea componenta normală zero și, după Propoziția 1.1, curba este linie asimptotică. ■

Fie, din nou, o curbă pe suprafața S , reprezentată parametric prin $\vec{r} = \vec{h}(u^1(s), u^2(s))$, $s \in [0, L]$, cu s lungime de arc. Într-un punct fixat P al ei, normala principală \vec{n} și normala la suprafață \vec{N} sunt în același plan, planul normal curbei în P . Fie $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{N})$. Avem $\cos \theta = \langle \vec{n}, \vec{N} \rangle = \frac{1}{k} \left\langle \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle$, unde k este curbura curbei. După (1.6), $\left\langle \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle = \sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = \frac{1}{ds^2} \left(\sum_{i,j} b_{ij} du^i du^j \right)$. Dar $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$ și obținem,

$$(1.7) \quad k_n = \left\langle \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle.$$

Așadar avem

$$(1.8) \quad k_n = k \cos \theta.$$

§2. Direcții principale într-un punct al unei suprafețe. Linii de curbura.

Ne ocupăm de direcțiile tangente unei suprafețe S pe care curbura normală ia valori extreme.

Fie o direcție tangentă $du = (du^1, du^2)$. Curbura normală într-un punct $P \in S$, fixat, apare ca funcție de variabilele du^1, du^2 , funcție dată de (1.3).

Definiția 2.1. Direcția tangentă la S , (du^1, du^2) , se numește direcție principală dacă ea este punct critic pentru curbura normală, adică

$$(2.1) \quad \frac{\partial k_n}{\partial (du^1)} = 0, \quad \frac{\partial k_n}{\partial (du^2)} = 0.$$

Valoarea curburii normale pentru o direcție principală se numește curbura principală și se va nota prin κ .

Prin derivare în (1.3), condițiile (2.1), după o simplificare cu 2, devin:

$$(*) \quad \begin{cases} (b_{11} du^1 + b_{12} du^2) \left(\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \right) = (g_{11} du^1 + g_{12} du^2) \left(\sum_{i,j} b_{ij} du^i du^j \right) \\ (b_{12} du^1 + b_{22} du^2) \left(\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \right) = (g_{12} du^1 + g_{22} du^2) \left(\sum_{i,j} b_{ij} du^i du^j \right). \end{cases}$$

Pentru (du^1, du^2) soluție a acestui sistem, raportul $\left(\sum_{i,j} b_{ij} du^i du^j \right) / \left(\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \right)$ este exact κ . Cu această notație sistemul (*) ia forma

$$(2.2) \quad \frac{b_{11} du^1 + b_{12} du^2}{g_{11} du^1 + g_{12} du^2} = \frac{b_{12} du^1 + b_{22} du^2}{g_{12} du^1 + g_{22} du^2} = \kappa.$$

Așadar direcțiile principale sunt soluții ale ecuației dată de prima egalitate din (2.2), care, după calcule, se dovedește a fi echivalentă cu

$$(2.3) \quad (b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11})(du^1)^2 + (b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11})du^1 du^2 + (b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12})(du^2)^2 = 0.$$

Aceasta este ecuația direcțiilor principale.

Ea se scrie și în forma, ușor de reținut,

$$(2.3') \quad \begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Există direcții principale? Trebuie să cercetăm dacă ecuația (2.3), ca ecuație de gradul 2 în $m = \frac{du^2}{du^1}$, are soluții reale. Pentru a simplifica unele calcule,

să alegem parametrizarea suprafeței încât liniile parametrice $u^1 = \text{const.}$ și $u^2 = \text{const.}$ să fie ortogonale, echivalent $g_{12} = 0$. Discriminantul ecuației (2.3) este

$$\delta = (b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11})^2 + 4b_{12}^2 g_{11}g_{22} \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } b_{12} = 0 \text{ și } \frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Amintim că $g_{11} > 0$ și $g_{22} > 0$.

Reapar cele două clase de puncte pe S .

Definiția 2.2. 1. Punctele pe S în care avem $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, se numesc **puncte planare**.

2. Punctele pe S în care are loc

$$(2.4) \quad \frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{R}, \quad R \neq 0,$$

se numesc **puncte ombilicale**.

Rezultă că în punctele neplanare și neombilicale există două direcții principale reale, distincte. După Propoziția 10.2, din Capitolul 3, acestea sunt ortogonale. În punctele planare și în cele ombilicale direcțiile principale sunt nedeterminate în sensul că orice direcție tangentă în $P \in S$ este direcție principală.

Definiția 2.3. O curbă pe S se numește **linie de curbură** dacă în toate punctele curbei direcția tangentei la curbă este direcție principală pe suprafața S .

Din (2.3') rezultă că ecuația diferențială a liniilor de curbură este

$$(2.5) \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 & -\frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} & \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Prin punctele neplanare și neombilicale trec două linii de curbură, reale și ortogonale. În punctele planare și ombilicale liniile de curbură sunt nedeterminate.

§3. Formulele Darboux - Ribaucour. Geodezice.

Fie suprafața S dată parametric prin

$$(3.1) \quad \vec{r} = \vec{h}(u^1, u^2), \quad \vec{h}_1 \times \vec{h}_2 \neq \vec{0} \text{ pe } U \text{ domeniu în } \mathbb{R}^2.$$

Fie pe S o curbă C de ecuații

$$(3.2) \quad u^i = u^i(s), \quad s \in [0, L], (i=1, 2),$$

încât, dacă

$$(3.2') \quad \vec{r} = \vec{h}(u^1(s), u^2(s)), \quad s \in [0, L],$$

este ecuația curbei în spațiu, să avem

$$(3.3) \quad \left\| \frac{d\vec{h}}{ds} \right\| = 1, \quad s \in [0, L].$$

Altfel spus, parametrul s este dat de lungimea de arc a curbei C .

$$\text{Notăm } \vec{T}(s) = \frac{d\vec{h}}{ds} \text{ și } \vec{N}_g(s) = \vec{N}(s) \times \vec{T}(s), \quad s \in [0, L].$$

Definiția 3.1. Reperul $\{P(s), (\vec{T}(s), \vec{N}_g(s), \vec{N}(s))\}$ se numește reperul

Darboux – Ribaucour. Cu s variabil, el este un reper mobil pe C .

Studiem variația acestui reper. În acest scop vom exprima vectorii

$\frac{d\vec{T}}{ds}, \frac{d\vec{N}_g}{ds}, \frac{d\vec{N}}{ds}$ în baza $(\vec{T}, \vec{N}_g, \vec{N})$. Observăm că această bază este ortonormată și pozitiv orientată.

Fie pentru început

$$(3.4) \begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = a_{11}\vec{T} + a_{12}\vec{N}_g + a_{13}\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}_g}{ds} = a_{21}\vec{T} + a_{22}\vec{N}_g + a_{23}\vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = a_{31}\vec{T} + a_{32}\vec{N}_g + a_{33}\vec{N}, \end{cases}$$

unde matricea (a_{ij}) $i, j = 1, 2, 3$ urmează a fi determinată.

Egalitățile

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rangle &= 0, \left\langle \vec{N}_g, \frac{d\vec{N}_g}{ds} \right\rangle = 0, \left\langle \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N}_g \right\rangle + \left\langle \vec{T}, \frac{d\vec{N}_g}{ds} \right\rangle &= 0, \left\langle \frac{d\vec{N}_g}{ds}, \vec{N} \right\rangle + \left\langle \vec{N}_g, \frac{d\vec{N}}{ds} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d\vec{N}}{ds}, \vec{T} \right\rangle + \left\langle \vec{N}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

obținute prin derivarea condițiilor de ortonormalitate ale bazei $(\vec{T}, \vec{N}_g, \vec{N})$, în combinație cu (3.4) ne arată că matricea (a_{ij}) $i, j = 1, 2, 3$ este antisimetrică.

Înmulțind scalar cu \vec{N} în prima formulă (3.4) obținem $a_{13} = \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N} \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle = k_n$, după (1.7). Așadar avem $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$;

$a_{13} = -a_{31} = k_n$. Notăm $a_{12} = -a_{21} = k_g$ și $a_{23} = -a_{32} = \tau_g$. Formulele (3.4) devin

formulele Darboux – Ribaucour:

$$(3.5) \begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= k_g \vec{N}_g + k_n \vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}_g}{ds} &= -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{N}_g. \end{aligned}$$

Acestea se pot scrie simbolic astfel

$$(3.5') \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_g \\ \vec{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_g \\ \vec{N} \end{bmatrix}.$$

În §1 am văzut că o curbă pe S este linie asimptotică dacă și numai dacă funcția $s \rightarrow k_n(s)$, $s \in [0, L]$ este identic nulă. Ne interesează ce curbe sunt caracterizate de anularea **torsiunii geodezice** τ_g și respectiv a **curburii geodezice** k_g .

Vom stabili la început o formulă de calcul pentru τ_g . Prin înmulțire scalară cu \vec{N}_g în ultima formulă Darboux – Ribaucour, obținem $\tau_g = -\left\langle \frac{d\vec{N}}{ds}, \vec{N}_g \right\rangle$ și deci

$$(3.6) \quad \tau_g = \left(\vec{T}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right) \text{ (produs mixt)}.$$

Dar după (FW), vectorul $\frac{d\vec{N}}{ds} = \sum_{i=1}^2 \vec{N}_i \frac{du^i}{ds} = -\sum_{i,j} \left(A_i^j \frac{du^i}{ds} \right) \vec{h}_j$, care substituit în (3.6) conduce la

$$\tau_g = \left(\sum_i \vec{h}_i \frac{du^i}{ds}, \sum_j \left(\sum_i A_i^j \frac{du^i}{ds} \right) \vec{h}_j, \vec{N} \right) = \left[\frac{du^1}{ds} \left(\sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} \right) - \frac{du^2}{ds} \left(\sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} \right) \right] (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N}).$$

Un calcul simplu arată că $(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N}) = \sqrt{\Delta}$. Așadar rezultă

$$(3.7) \quad \tau_g = \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} & \sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} \end{vmatrix}.$$

Dar după formulele (8.8) din Capitolul 3,

$$\begin{aligned} \sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} &= A_1^1 \frac{du^1}{ds} + A_2^1 \frac{du^2}{ds} = (g^{11}b_{11} + g^{12}b_{21}) \frac{du^1}{ds} + \\ &+ (g^{11}b_{12} + g^{12}b_{22}) \frac{du^2}{ds} = \frac{1}{\Delta} (g_{22}b_{11} - g_{12}b_{21}) \frac{du^1}{ds} + \frac{1}{\Delta} (g_{22}b_{12} - g_{12}b_{22}) \frac{du^2}{ds} \end{aligned}$$

și similar,

$$\sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} = \frac{1}{\Delta} (g_{11}b_{21} - g_{12}b_{11}) \frac{du^1}{ds} + \frac{1}{\Delta} (g_{11}b_{22} - g_{12}b_{12}) \frac{du^2}{ds}.$$

Înlocuind în (3.7) obținem

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}) \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}) \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}) \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 \right]$$

sau

$$(3.8) \quad \tau_g = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{ds} \right)^2 & -\frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} & \left(\frac{du^1}{ds} \right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Comparând (3.8) cu (2.5) obținem

Propoziția 3.1. *O curbă pe suprafața S este linie de curbură pe S dacă și numai dacă în punctele curbei are loc $\tau_g = 0$.*

În concluzie, anularea invariantilor k_n și τ_g caracterizează curbele pe S studiate anterior, linii asimptotice și respectiv linii de curbură. Invariantul k_g va fi folosit pentru a introduce o nouă clasă de curbe numite **geodezice** pe S .

Definiția 3.2. *O curbă pe suprafața S , cu proprietatea că în punctele ei are loc egalitatea $k_g = 0$, se numește geodezică pe S .*

Stabilim acum formule de calcul pentru k_g .

Prin înmulțire scalară cu \vec{N}_g în prima formulă Darboux – Ribaucour

obținem $k_g = \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N}_g \right\rangle = \left(\frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N}, \vec{T} \right)$ sau

$$(3.9) \quad k_g = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right).$$

Trecând la o parametrizare oarecare a curbei, de parametru t , folosind

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2},$$

obținem

$$(3.10) \quad k_g = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \vec{N} \right) \cdot \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

Vom da o altă formă lui k_g folosind (1.6). Plecând cu (3.9) avem:

$$k_g = \left(\sum_i h_i \frac{du^i}{ds}, \left(\frac{d^2 u^1}{ds^2} + B^1 \right) \vec{h}_1 + \left(\frac{d^2 u^2}{ds^2} + B^2 \right) \vec{h}_2 + \left(\sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \vec{N}, \vec{N} \right),$$

unde $B^1 = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$, $B^2 = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$. Pe baza proprietăților produsului

mixt, obținem $k_g = \left[\frac{du^1}{ds} \left(\frac{d^2 u^2}{ds^2} + B^2 \right) - \frac{du^2}{ds} \left(\frac{d^2 u^1}{ds^2} + B^1 \right) \right] (\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{N})$ sau

$$(3.11) \quad k_g = \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2 u^1}{ds^2} + B^1 & \frac{d^2 u^2}{ds^2} + B^2 \end{vmatrix} \sqrt{\Delta}.$$

Revenim la (3.9) și constatăm că avem $k_g = 0$, dacă și numai dacă vectorii $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}, \vec{N}$ sunt coplanari, altfel spus $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ este în planul determinat de punctul curbei și vectorii $\frac{d\vec{r}}{ds}$ și \vec{N} . Dar condiția $\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$, adică $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2 = 1$, prin derivare ne dă $\left\langle \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\rangle = 0$. Deci $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ este ortogonal pe $\frac{d\vec{r}}{ds}$, echivalent este colinar cu \vec{N} . Așadar are loc

Propoziția 3.2. *O curbă pe S , de ecuație $\vec{r} = \vec{r}(u^1(s), u^2(s))$, $s \in [0, L]$ cu parametru s lungime de arc, este geodezică dacă și numai dacă vectorul $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ este colinar cu \vec{N} de-a lungul curbei.*

Subliniem că parametrizarea prin lungime de arc în Propoziția 3.2 este esențială. Proprietatea nu mai are loc în altă parametrizare. Mai exact, dacă pe o geodezică ($k_g = 0$) trecem la altă parametrizare dată de un parametru t , curba

continuă să fie geodezică ($k_g = 0$) dar $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ nu este colinar cu \vec{N} .

Corolar 3.1. *O curbă C pe S de ecuație $u^i = u^i(s)$, $s \in [0, L]$ $i = 1, 2$ cu s lungime de arc este geodezică dacă și numai dacă funcțiile (u^i) $i = 1, 2$ sunt soluții ale sistemului de ecuații diferențiale de ordinul 2,*

$$(3.12) \quad \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i (u^1(s), u^2(s)) \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Demonstrație. Scriem formula (1.6) cu parametrul s . După Propoziția 3.2, curba C este geodezică dacă și numai dacă componenta tangențială a vectorului $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ este nulă. Cum \vec{h}_1 și \vec{h}_2 sunt vectori liniar independenți, acest fapt este echivalent cu (3.12). ■

Ecuatiile (3.12) se numesc **ecuațiile diferențiale ale geodezicilor** suprafeței S . Parametrizarea prin lungime de arc este și aici esențială. La trecerea la un parametru oarecare t , ecuațiile (3.12) se complică prin apariția în membrul drept a unui termen în general diferit de zero. (Exercițiu). Sistemul (3.12) își menține forma numai pentru reparametrizări ale curbei de forma $s' = \pm s + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Are loc următoarea caracterizare geometrică a geodezicilor.

Propoziția 3.3. *O curbă pe S este geodezică dacă și numai dacă în fiecare punct al curbei planul ei osculator conține normala la suprafață în acel punct.*

Demonstrație. Condiția $k_g = 0$ este echivalentă cu coplanaritatea vectorilor $\frac{d\vec{r}}{ds}$, $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ și \vec{N} . Cum planul osculator este determinat de $\frac{d\vec{r}}{ds}$ și $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}$ rezultă că această condiție este echivalentă cu situarea normalei la S în planul osculator al curbei. ■

Sistemul de ecuații diferențiale (3.12) este neliniar dar coeficienții săi sunt funcții diferențiabile. Teorema de existență și unicitate pentru sisteme de acest tip justifică

Propoziția 3.4. *Prin orice punct $P_0(u_0^1, u_0^2)$ și în orice direcție tangentă (a^1, a^2) trece o singură geodezică.*

Demonstrație. Sistemul (3.12) admite soluția unică

$$(3.13) \quad \begin{cases} u^1 = u^1(s) \\ u^2 = u^2(s), \quad s \in [0, \varepsilon), \end{cases}$$

cu $\varepsilon > 0$, soluție care pentru $s = 0$ satisface condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u^1(0) &= u_0^1, & \frac{du^1}{ds}(0) &= a^1, \\ u^2(0) &= u_0^2, & \frac{du^2}{ds}(0) &= a^2. \end{aligned}$$

Ecuatiile (3.13) definesc o geodezică prin S care trece prin $P_0(u_0^1, u_0^2)$ și are în acel punct direcția tangentă (a^1, a^2) . ■

Revenim la curbe oarecare pe suprafața S . Pentru o asemenea curbă avem invarianții k_g, k_n, τ_g precum și invarianții curbură k și torsiune τ când este privită ca o curbă în spațiu. În mod necesar primii trei trebuie să se exprime cu k și τ , și invers. Stabilim asemenea exprimări.

Observăm că vectorii $\vec{N}_g, \vec{N}, \vec{n}$ și \vec{b} sunt în același plan, perpendicular pe $\vec{T} = \vec{t}$. Notăm $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{N})$ și constatăm că versorii reperului Darboux – Ribaucour se exprimă funcție de versorii reperului Frenet astfel

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \vec{T} &= \vec{t}, \\ \vec{N}_g &= \vec{n} \sin \theta - \vec{b} \cos \theta, \\ \vec{N} &= \vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta. \end{aligned}$$

Invers, versorii reperului Frenet se exprimă în funcție de versorii reperului Darboux – Ribaucour în forma

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \vec{t} &= \vec{T}, \\ \vec{n} &= \vec{N}_g \sin \theta + \vec{N} \cos \theta, \\ \vec{b} &= -\vec{N}_g \cos \theta + \vec{N} \sin \theta. \end{aligned}$$

În formula $\frac{d\vec{N}_g}{ds} = \dot{\vec{n}} \sin \theta + \dot{\theta} \vec{n} \cos \theta - \dot{\vec{b}} \cos \theta + \dot{\theta} \vec{b} \sin \theta$, folosim formulele lui Frenet, formulele lui Darboux – Ribaucour și (15.14) pentru a obține

$$-k_g \vec{t} + \tau_g (\vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta) = (-k \vec{t} + \tau \vec{b}) \sin \theta + \dot{\theta} \vec{n} \cos \theta + \tau \vec{n} \cos \theta + \dot{\theta} \vec{b} \sin \theta,$$

de unde rezultă $k_g = k \sin \theta$, $\tau_g \cos \theta = \dot{\theta} \cos \theta + \tau \cos \theta$, $\tau_g \sin \theta = \dot{\theta} \sin \theta + \tau \sin \theta$.

Din ultimele două ecuații obținem $\tau_g = \tau + \dot{\theta}$. Procedăm similar plecând de la $\frac{d\vec{N}}{ds}$ și obținem $k_n = k \cos \theta$. În concluzie au loc formulele

$$(3.16) \quad \begin{aligned} k_n &= k \cos \theta, \\ k_g &= k \sin \theta, \\ \tau_g &= \tau + \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Acestea se pot inversa în forma

$$(3.16') \quad k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}, \quad \tau = \tau_g - \dot{\theta}.$$

Formulele (3.16) au loc de-a lungul curbei C parametrizată prin lungime de arc. Dacă se trece la un parametru oarecare t , primele două formule rămân neschimbate iar ultima devine $\tau_g(s(t)) = \tau(s(t)) + \frac{d\theta}{ds}(s(t)) \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|}$.

Teorema lui Bonnet. Fie S_1 și S_2 două suprafețe care se intersectează după o curbă C și fie ψ unghiul făcut de normalele lor în lungul curbei C . Atunci, oricare două din afirmațiile următoare implică pe a treia.

1. C este linie de curbură pe S_1 ,
2. C este linie de curbură pe S_2 ,
3. Unghiul ψ este constant.

Demonstrație. Fie $\theta_1 = \angle(\vec{n}, \vec{N}_1)$ și $\theta_2 = \angle(\vec{n}, \vec{N}_2)$, unde \vec{N}_1 și \vec{N}_2 sunt vectorii normali unitari la S_1 , respectiv S_2 . Fie τ_g^1 torsiunea geodezică a curbei C pe S_1 și τ_g^2 torsiunea geodezică a curbei C pe S_2 . Avem, după (3.16), $\tau_g^1 = \tau + \dot{\theta}_1$, $\tau_g^2 = \tau + \dot{\theta}_2$. Deci $\tau_g^2 - \tau_g^1 = \frac{d}{ds}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{d\psi}{ds}$. Așadar, dacă $\tau_g^1 = 0$ și $\tau_g^2 = 0$, atunci $\psi = \text{const}$. Dacă $\tau_g^1 = 0$ și $\psi = \text{const}$, atunci $\tau_g^2 = 0$ și în sfârșit, dacă $\tau_g^2 = 0$ și $\psi = \text{const}$, atunci $\tau_g^1 = 0$. ■

Corolar 3.2. O sferă taie o suprafață S sub unghi constant dacă și numai dacă curba de intersecție este linie de curbură pe S .

Demonstrație. Curba de intersecție este linie de curbură pe sferă. Se aplică teorema lui Bonnet. ■

Corolar 3.3. Dacă două sfere se intersectează, unghiul normalelor în lungul curbei de intersecție este constant.

Demonstrație. Curba de intersecție este linie de curbură pe ambele suprafețe. Se aplica teorema lui Bonnet. ■

CAPITOLUL 5

CLASE REMARCABILE DE SUPRAFEȚE

Rezumat. Se definește noțiunea de aplicație diferențiabilă $F: S \rightarrow \tilde{S}$ între suprafețele S și \tilde{S} care se numește corespondența între S și \tilde{S} dacă este difeomorfism. Corespondența se numește conformă dacă păstrează unghiul oricăror două direcții tangente și se numește izometrie dacă oricare două curbe care se corespund au aceeași lungime. Se demonstrează caracterizări ale corespondențelor conforme și izometrice. Ca aplicație se arată că suprafețele de curbură totală constantă $K=0$ sunt local izometrice cu un plan, cele de curbură totală constantă pozitivă $K=\frac{1}{R^2}$ sunt local izometrice cu sfera de rază R și că cele de curbură constantă negativă sunt local izometrice cu pseudosfera. Prin rotirea unei curbe în jurul unei drepte pe care nu o intersectează se obține o suprafață de rotație. Se demonstrează proprietăți de bază ale suprafețelor de rotație de ecuații: $x=u \cos v$, $y=u \sin v$, $z=\psi(u)$, $u>0, v \in \mathbb{R}$ și ale suprafețelor elicoidale, caz în care z are forma $z=\psi(u)+av$, $a \in \mathbb{R}$. O suprafață de ecuații: $\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, \vec{b}^2=1$ se numește suprafață riglată sau simplu riglată. Planul tangent ei într-un punct conține generatoarea (curba $u=\text{const.}$) prin acel punct. Riglata se numește desfășurabilă dacă planele tangente ei în punctele unei generatoare coincid. Se arată că această proprietate are loc dacă și numai dacă $(\vec{a}', \vec{b}, \vec{b}')=0$. Riglatele desfășurabile sunt conurile, cilindrii și suprafețele generate de tangentele la curbe date. O suprafață este riglată desfășurabilă dacă și numai dacă $K=0$. Dată o curbă C închisă în spațiu, suprafața de arie minimă cu frontiera C se numește suprafață minimală. Suprafețele minimale sunt caracterizate de anularea curburii medii ($H=0$)

§1. Aplicații diferențiabile între suprafețe

Fie S și \tilde{S} două suprafețe în E^3 .

Definiția 1.1. O aplicație continuă $F: S \rightarrow \tilde{S}$, $P \rightarrow F(P)$, este diferențiabilă de clasă C^k ($k \geq 1$) în punctul $P \in S$ dacă există o parametrizare $h: U \rightarrow S$ cu $P \in h(U)$ și o parametrizare $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{S}$ cu $F(P) \in \tilde{h}(\tilde{U})$ încât aplicația $\tilde{h}^{-1} \circ F \circ h: U \rightarrow \tilde{U}$ dată de ecuațiile

$$(1.1) \quad \begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2) \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2), \end{cases} \quad (u^1, u^2) \in U,$$

este diferențiabilă de clasă C^k ($k \geq 1$) pe U .

Aplicația F este *diferențiabilă* de clasă C^k pe S dacă este diferențiabilă în toate punctele suprafeței S .

Definiția 1.2. O aplicație $F : S \rightarrow \tilde{S}$, diferențiabilă de clasă C^k , se numește **corespondență** între suprafețele S și \tilde{S} dacă F este difeomorfism de clasă C^k , adică există inversa F^{-1} și F^{-1} este aplicație diferențiabilă de clasă C^k .

În continuare vom considera S și \tilde{S} suprafețe elementare. Dacă F este o corespondență între S și \tilde{S} , aplicația (1.1) este bijectivă și are proprietatea

$$(1.2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } U.$$

În acest caz, ecuațiile (1.1) cu condiția (1.2), pot fi privite ca o schimbare de parametri pe \tilde{S} . După efectuarea acestei schimbări de parametri, punctele P și $F(P)$ vor avea aceleași coordonate (u^1, u^2) și aplicația dată de (1.1) se reduce la

$$(1.1') \quad \begin{cases} \tilde{u}^1 = u^1 \\ \tilde{u}^2 = u^2, \quad (u^1, u^2) \in U. \end{cases}$$

Aplicația diferențiabilă de clasă C^k , $F : S \rightarrow \tilde{S}$, $P \rightarrow F(P) = \tilde{P}$ induce o aplicație liniară $F_{*,p} : T_p S \rightarrow T_{\tilde{P}} \tilde{S}$, $X \rightarrow F_{*,p}(X)$, $X \in T_p S$ între spații tangente, după cum urmează.

Conform Definiției 4.2, Capitolul 3, X este un vector tangent la o curbă $t \rightarrow (u^1(t), u^2(t))$ care trece prin P la $t = 0$. Definim vectorul tangent $F_{*,p}(X)$ ca fiind vectorul tangent la curba $t \rightarrow (\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t))$ care trece prin \tilde{P} la $t = 0$. Invităm cititorul să verifice că într-adevăr vectorul $F_{*,p}(X)$ este bine definit (nu depinde de curba aleasă). Componentele lui X în baza (\vec{h}_1, \vec{h}_2) sunt $X^i = \frac{du^i}{dt}(0)$, $i = 1, 2$.

Componentele lui $F_{*,p}(X)$ în baza $(\vec{\tilde{h}}_1, \vec{\tilde{h}}_2)$ vor fi $\tilde{X}^i = \frac{d\tilde{u}^i}{dt}(0) = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt}(0) = X^1 \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^2}$. Așadar aplicația $F_{*,p} : (X^1, X^2) \rightarrow (\tilde{X}^1, \tilde{X}^2)$ se scrie matricial în forma

$$(1.3) \quad F_{*,P}(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix}.$$

Rezultă imediat că $F_{*,P}$ este aplicație liniară. Dacă F este corespondență, este evident că $F_{*,P}$ este izomorfism liniar. Vectorul \vec{h}_1 are componentele (1,0) iar vectorul \vec{h}_2 are componentele (0,1) în baza (\vec{h}_1, \vec{h}_2) . Folosind (1.3) obținem

$$(1.4) \quad \begin{aligned} F_{*,P}(\vec{h}_1) &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} \vec{h}_1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \vec{h}_2, \\ F_{*,P}(\vec{h}_2) &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \vec{h}_1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \vec{h}_2. \end{aligned}$$

Unei direcții tangente $du = (du^1, du^2)$ îi corespunde prin $F_{*,P}$ direcția $F_{*,P}(du) = (d\tilde{u}^1, d\tilde{u}^2)$, unde

$$(1.5) \quad \begin{cases} d\tilde{u}^1 = \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} du^2, \\ d\tilde{u}^2 = \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} du^2. \end{cases}$$

Dacă F este corespondență dată de ecuațiile (1.1'), $F_{*,P}$ se reduce la aplicația identică și formulele (1.3) – (1.5) se simplifică în mod corespunzător.

Definiția 1.3. Corespondența $F: S \rightarrow \tilde{S}$ se numește **conformă** dacă păstrează unghiul a oricăror două direcții tangente în fiecare punct $P \in S$.

Teorema 1.1. O corespondență $F: S \rightarrow \tilde{S}$ dată prin ecuațiile reduse (1.1') este conformă dacă și numai dacă

$$(1.6) \quad \tilde{g}_{ij}(u^1, u^2) = \lambda(u^1, u^2) g_{ij}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in U, \quad i, j = 1, 2$$

pentru o funcție $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$, strict pozitivă.

Demonstrație. Alegem parametrizarea pe S încât liniile parametrice să fie ortogonale, adică $g_{12} = 0$. Dacă F este corespondență conformă, liniile parametrice pe \tilde{S} trebuie să fie tot ortogonale, adică $\tilde{g}_{12} = 0$.

Fie două direcții (du^1, du^2) și (dv^1, dv^2) oarecare, ortogonale. Cum F este corespondență conformă, imaginile acestor direcții prin $F_{*,P}$ vor fi ortogonale. Așadar egalitățile următoare au loc simultan.

$$\begin{aligned} g_{11}du^1dv^1 + g_{22}du^2dv^2 &= 0, \\ \tilde{g}_{11}du^1dv^1 + \tilde{g}_{22}du^2dv^2 &= 0. \end{aligned}$$

Din acestea rezultă $\frac{\tilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\tilde{g}_{22}}{g_{22}}$. Notăm cu λ valoarea comună a acestor

rapoarte. Evident $\lambda > 0$ și desigur putem scrie și $g_{12} = \lambda g_{12}$. Așadar au loc egalitățile (1.6). Reciproc, egalitățile (1.6) folosite în formula care dă cosinusul unghiului a două direcții, ne arată că F dată prin ecuațiile (1.1') este conformă. ■

Egalitățile (1.6) se scriu și în forma

$$(1.6') \quad \left\langle \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda(u^1, u^2) \left\langle \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2$$

unde $h: U \rightarrow S$ și $h_0: U \rightarrow \tilde{S}$ sunt parametrizări în care corespondența $F: S \rightarrow \tilde{S}$ este definită prin egalitatea coordonatelor lui P și $\tilde{P} = F(P)$. Fie $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{S}$ o nouă parametrizare a suprafeței \tilde{S} . Să presupunem că există un difeomorfism $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ cu proprietatea că $h_0 = \tilde{h} \circ \varphi$. Păstrăm aplicația F în sensul că acum ea va asocia lui $P(u^1, u^2)$ același punct \tilde{P} dar de coordonate curbilinii $\tilde{u} = \varphi(u)$, $u = (u^1, u^2)$. Dacă F este corespondență conformă ea continuă să rămână conformă în această nouă reprezentare analitică iar egalitățile (1.6') devin

$$(1.7) \quad \left\langle \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda(u^1, u^2) \left\langle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u^i}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2$$

pentru o funcție strict pozitivă $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Așadar putem întări Teorema 1.1 în forma

Teorema 1.1'. Fie $h: U \rightarrow S$ și $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{S}$ parametrizări de suprafețe elementare S și \tilde{S} . O corespondență $F: S \rightarrow \tilde{S}$ este conformă dacă și numai dacă există un difeomorfism $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ încât să aibă loc egalitățile (1.7).

Fie $h: U \rightarrow \Pi$ o parametrizare a unui plan Π iar $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow S$ o parametrizare a suprafeței elementare S . După Teorema 1.1' o aplicație $F: \Pi \rightarrow S$ este corespondență conformă dacă și numai dacă există un difeomorfism $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ încât să aibă loc (1.7), egalități care, în acest caz particular, se scriu

$$(1.8) \quad \left\langle \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda(u^1, u^2) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

pentru o funcție strict pozitivă $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Privim φ ca o schimbare de parametrii pe S . Egalitățile (1.8) devin

$$(1.8') \quad g_{ij}(u^1, u^2) = \lambda(u^1, u^2) \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2$$

pentru $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Așadar suprafața simplă S este în corespondență locală conformă sau este local conformă cu un plan Π dacă admite o parametrizare în care forma I-a fundamentală a ei se scrie

$$(1.9) \quad \phi(P, du) = \lambda(u^1, u^2) \left[(du^1)^2 + (du^2)^2 \right].$$

Definiția 1.4. O parametrizare a suprafeței S în care forma I-a fundamentală are expresia (1.9) se numește parametrizare izotermă.

Se poate arăta că există o infinitate de parametrizări izoterme. Așadar orice suprafață este local conformă într-o infinitate de moduri cu un plan. În particular, sfera S^2 este local conformă cu un plan. Acest fapt servește la desenarea hărților plane ale unor regiuni de pe globul pământesc. În aceste hărți se păstrează unghiurile formate de elementele corespunzătoare de pe glob.

Definiția 1.5. O corespondență $F: S \rightarrow \tilde{S}$ se numește **corespondență izometrică** sau **izometrie** dacă oricare două curbe ce se corespund prin F au aceeași lungime.

Teorema 1.2. O corespondență $F: S \rightarrow \tilde{S}$ dată prin ecuațiile reduse (1.1') este izometrie dacă și numai dacă

$$(1.10) \quad \tilde{g}_{ij}(u^1, u^2) = g_{ij}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in U, \quad i, j=1, 2.$$

Demonstrație. Fie o curbă C pe S de ecuații $\begin{cases} u^1 = u^1(t) \\ u^2 = u^2(t), \quad t \in [0, T] \end{cases}$, curbă

care pleacă din P_0 la $t = 0$. Arcul de curbă $\widehat{P_0 P(t)}$ are lungimea

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} dt$$

iar arcul corespunzător lui pe \tilde{S} , dacă F este izometrică, are aceeași lungime $l(t)$, cu expresia

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\tilde{g}_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{g}_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \tilde{g}_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} dt.$$

Prin derivarea funcției $t \rightarrow l(t)$, după o ridicare la pătrat obținem egalitatea

$$g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 = \tilde{g}_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{g}_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \tilde{g}_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2,$$

care are loc pentru orice pereche $\left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right)$. Rezultă că în mod necesar au loc egalitățile (1.10). Reciproca este imediată. ■

Similar cu Teorema 1.1' se justifică următoarea formă mai tare a Teoremei 1.2.

Teorema 1.2'. Fie $h:U \rightarrow S$ și $\tilde{h}:\tilde{U} \rightarrow \tilde{S}$ parametrizări de suprafețe elementare S și \tilde{S} . O corespondență $F:S \rightarrow \tilde{S}$ este izometrie dacă și numai dacă există un difeomorfism $\varphi:U \rightarrow \tilde{U}$ încât să aibă loc

$$(1.10) \quad \left\langle \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\tilde{h} \circ \varphi)}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial h}{\partial u^i}, \frac{\partial h}{\partial u^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Pe baza formulei (1.4), Teorema 1.2 se poate reformula astfel.

Teorema 1.3. O corespondență $F:S \rightarrow \tilde{S}$ dată prin ecuațiile reduse (1.1') este izometrie dacă și numai dacă aplicația tangentă este izometrie de spații vectorial euclidiene, pentru orice $P \in S$.

Două suprafețe între care există o corespondență izometrică în sensul de mai sus se vor numi local izometrice pentru că toate considerațiile precedente au fost de natură locală. De exemplu, o suprafață S este local izometrică cu un plan dacă admite o parametrizare în care forma I-a fundamentală a ei are expresia $\phi(P, du) = (du^1)^2 + (du^2)^2$.

Două suprafețe local izometrice au local aceeași geometrie intrinsecă.

§2. Suprafețe de curbură constantă

Fie o suprafață S de curbură constantă K_0 . Dat un punct $P \in S$ și o geodezică C care conține P , se poate introduce o parametrizare numită semigeodezică în care liniile parametrice $v = \text{constant}$ sunt geodezice ($v = 0$ este C) iar liniile parametrice $u = \text{constant}$ sunt ortogonale pe acestea. Rezultă că în această parametrizare forma I-a fundamentală se scrie

$$(2.1) \quad \phi(u, du) = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

Mai mult, parametrizarea semigeodezică se poate alege astfel ca

$$(2.2) \quad G(0, v) = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial u}(0, v) = 0.$$

Dacă se calculează expresia curburii totale în parametrizare semigeodezică se obține

$$(2.3) \quad K(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Condiția $K = K_0$ se poate pune în forma

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K_0 \sqrt{G} = 0,$$

pe care o privim ca ecuație diferențială de ordin 2 cu coeficienți constanți în necunoscuta \sqrt{G} funcție de u , cu v ca parametru.

Distingem trei cazuri.

1. $K_0 = 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este $\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v)$.

Pentru $u = 0$, obținem $c_2(v) = 1$ pentru că $(\sqrt{G})(0, v) = 1$. Prin derivare în raport cu u a soluției generale, obținem $c_1(v) = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$. Dar după (2.2), $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(0, v) = 0$. Rezultă $c_1(v) = 0$. Așadar în condițiile inițiale (2.3), ecuația diferențială (2.4) are soluția $\sqrt{G} = 1$. Rezultă că în parametrizarea geodezică folosită, forma I-a fundamentală a suprafeței S este $\phi = (du)^2 + (dv)^2$. Conchidem că S este local izometrică cu un plan. Acesta este un motiv pentru care suprafețele cu $K = 0$ se numesc și local plane sau local plate.

2. $K_0 = \frac{1}{R^2} > 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este

$$\sqrt{G} = c_1(v) \cos \frac{u}{R} + c_2(v) \sin \frac{u}{R}.$$

Condițiile inițiale (2.2) conduc la $c_1(v) = 1$ și $c_2(v) = 0$. Rezultă că în acest caz forma I-a fundamentală a suprafeței S se scrie astfel

$$(2.5) \quad \phi = du^2 + \left(\cos^2 \frac{u}{R} \right) dv^2.$$

Se știe că forma I-a fundamentală a unei sfere de rază R în reprezentarea dată de meridiane și paralele are exact forma (2.5). Teorema 1.2' din §1 ne spune că suprafețele S de curbură constantă pozitivă $\frac{1}{R^2}$ sunt local izometrice cu sfera de rază R . Deci sfera este, în sensul descris, un model standard pentru suprafețele de curbură constantă pozitivă.

3. $K_0 = -\frac{1}{R^2} < 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este

$$\sqrt{G} = c_1(v) \operatorname{ch} \frac{u}{R} + c_2(v) \operatorname{sh} \frac{u}{R}.$$

Condițiile inițiale (2.2) ne dau $c_1(v) = 1$ și $c_2(v) = 0$. Ca atare, forma I-a fundamentală a suprafeței este în acest caz

$$(2.6) \quad \phi = du^2 + \left(ch^2 \frac{u}{R} \right) dv^2.$$

Există și aici o suprafață care servește ca model standard pentru toate suprafețele de curbura negativă constantă. Aceasta se numește pseudosferă și se poate da prin ecuațiile

$$(2.7) \quad \begin{cases} x = a(u) \cos v, \\ y = a(u) \sin v, \\ z = b(u), \end{cases}$$

unde $a(u) = ch \frac{u}{R}$ și $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} sh^2 \frac{t}{R}} dt$. Rezultă

$$g_{11} = a'^2(u) + b'^2(u) = \frac{1}{R^2} sh^2 \frac{u}{R} + 1 - \frac{1}{R^2} sh^2 \frac{t}{R} = 1,$$

$$g_{12} = 0 \text{ și } g_{22} = ch^2 \frac{u}{R}.$$

Deci forma I-a fundamentală a pseudosferei în parametrizarea (2.7) (care este semigeodezică) coincide cu (2.6). Curbura totală a pseudosferei, calculată după formula (2.3), este $-\frac{1}{R^2}$. Așadar orice suprafață de curbura constantă negativă este local izometrică cu o pseudosferă.

În concluzie, putem spune că, prin cele trei cazuri analizate, suprafețele de curbura totală constantă sunt local complet clasificate. Cele de curbura totală zero au local geometria intrinsecă a unui plan, cele de curbura totală constantă pozitivă pe a unei sfere, iar cele de curbura constantă negativă pe cea a unei pseudosfere.

§3. Suprafețe de rotație și suprafețe elicoidale

Intuitiv, o curbă care se deplasează în spațiu descrie o suprafață. Considerăm deplasarea particulară care constă din rotirea unei curbe în jurul unei drepte. Suprafața astfel obținută se numește suprafață de rotație. Punctele curbei vor descrie cercuri cu centrele pe dreaptă, situate în plane perpendiculare pe dreaptă, numită axă de rotație. Aceste cercuri se numesc paralele ale suprafeței de rotație.

Planele prin axa de rotație vor intersecta suprafața de rotație după curbe numite meridiane ale suprafeței de rotație. Paralelele și meridianele formează o rețea și ca atare pot fi folosite pentru parametrizarea suprafeței. Este clar că suprafața de rotație poate fi gândită ca suprafața obținută prin rotirea unui meridian în jurul axei de rotație.

Alegem un reper $Oxyz$ în E^3 încât axa Oz să coincidă cu axa de rotație și considerăm meridianul din planul xOz . Această curbă are o reprezentare parametrică de forma

$$(3.1) \quad x = \varphi(u), y = 0, z = \psi(u)$$

cu $\varphi'^2(u) + \psi'^2(u) > 0$ pentru $u \in (a, b)$.

Un punct oarecare al suprafeței obținută prin rotirea curbei de ecuații (3.1) în jurul axei Oz are coordonatele $M(\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$, unde $v \in (0, 2\pi)$ este unghiul rotației care duce punctul $M_0(\varphi(u), 0, \psi(u))$ de pe meridian în punctul M , cf. Fig. 26.

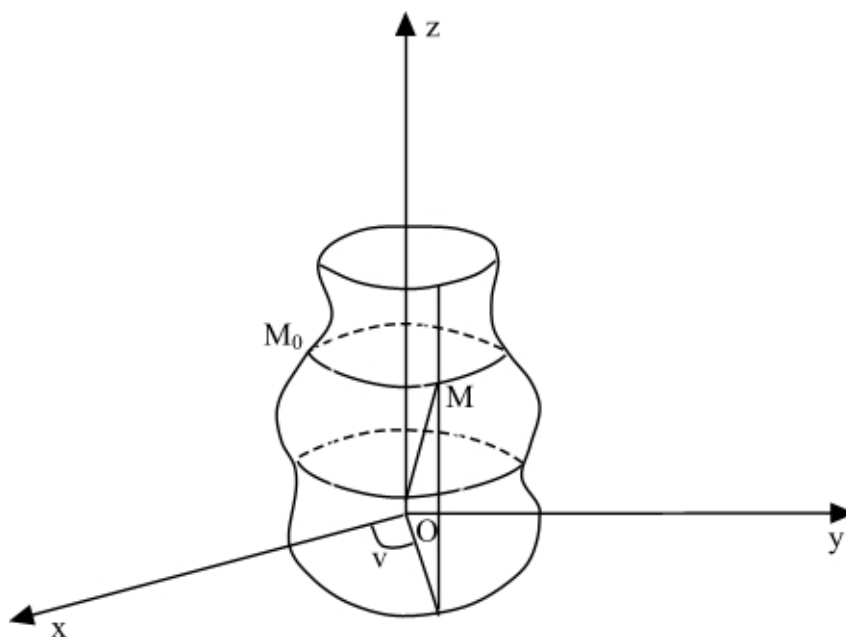


Fig. 26

În particular, curba meridian poate avea reprezentarea explicită cu, de exemplu, $\varphi(u) = u, u \geq 0$ și atunci coordonatele lui M sunt $(u \cos v, u \sin v, \psi(u)), u \geq 0$.

Aceste considerații sugerează

Definiția 3.1. Se numește **suprafață de rotație** o suprafață care admite o reprezentare de forma

$$(3.2) \quad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \psi(u), \quad u > 0, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Am impus condiția $u > 0$ pentru a ne asigura că (3.2) este o suprafață în sensul considerat în Cap. 3.

Într-adevăr, avem

$$(3.3) \quad \vec{h}_1 = (\cos v, \sin v, \psi'(u)), \vec{h}_2 = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

și $|\vec{h}_1 \times \vec{h}_2| = u^2 (1 + \psi'^2) \neq 0$ dacă și numai dacă $u \neq 0$.

Geometric, inegalitatea $u \neq 0$ revine la condiția că axa de rotație nu intersectează meridianele suprafeței de rotație.

Vectorul normal unitar este

$$(3.4) \quad \vec{N}(u, v) = \left(-\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}} \cos v, -\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}} \sin v, \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}} \right).$$

Ecuția planului tangent este

$$(3.5) \quad x\psi' \cos v + y\psi' \sin v - z + \psi - \psi' = 0.$$

Ecuțiile normalei la suprafața de rotație sunt

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x &= u \cos v + \lambda \psi' \cos v \\ y &= u \sin v + \lambda \psi' \sin v \\ z &= \psi(u) - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Are loc

Propoziția 3.1. Normala la suprafața de rotație S într-un punct P coincide cu normala principală a curbei meridian prin P .

Demonstrație. Curba meridian prin $P(u, v_0)$ are ecuația $v = v_0$ și privită ca o curbă în spațiu are ecuațiile (3.2) cu $v = v_0$. Un calcul direct arată că normala ei principală în P are direcția dată de $(\psi' \cos v_0, \psi' \sin v_0, -1)$, unde ψ' este calculat pentru $v = v_0$.

Se poate raționa și astfel. Curba meridian este plană. Ea se află în planul determinat de P și Oz , plan osculator al ei. Normala principală prin P este unica dreaptă perpendiculară pe tangenta în P la curba meridian și conținută în planul osculator (P, Oz) . Pe de altă parte, normala la S în P , de ecuații (3.6), trece prin P , este perpendiculară pe tangenta la meridian în P și este conținută în planul (P, Oz) pentru că direcția ei dată de $(\psi' \cos v, \psi' \sin v, -1)$ este perpendiculară pe direcția normală la acest plan dată de $(\sin v, -\cos v, 0)$. Deci ea coincide cu normala principală a curbei meridian. ■

Coeficienții primei forme fundamentale sunt

$$(3.7) \quad E = 1 + \psi'^2, \quad F = 0, \quad G = u^2.$$

Coeficienții celei de-a doua forme fundamentale sunt

$$(3.8) \quad L = \frac{\psi''}{\sqrt{1 + \psi'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{u\psi'}{\sqrt{1 + \psi'^2}}.$$

Meridianele și paralelele formează rețeaua liniilor parametrice. Cum $F = 0$ și $M = 0$ aceasta coincide cu rețeaua liniilor de curbură ale suprafeței. Deci

Propoziția 3.2. *Liniile de curbură ale unei suprafețe de rotație sunt meridianele și paralelele ei.*

Liniile asimptotice sunt date de soluțiile ecuației diferențiale

$$(3.9) \quad \psi''(du)^2 + u\psi'(dv)^2 = 0.$$

Rezultă $\frac{dv}{du} = \pm \sqrt{-\frac{\psi''}{u\psi'}}$ și $v = c \pm \int \sqrt{-\frac{\psi''}{u\psi'}} du$, unde c este o constantă de integrare.

Curbura totală este dată de

$$(3.10) \quad K = \frac{\psi'\psi''}{u(1 + \psi'^2)^2}.$$

Curbura medie H are expresia

$$(3.11) \quad H = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2}} \left[\frac{\psi'}{u} + \frac{\psi''}{1 + \psi'^2} \right].$$

Dacă vom considera pe meridianul generator un punct de inflexie P_0 , vom avea $\psi''(u) = 0$ în toate punctele cercului paralel descris de P_0 și deci în aceste puncte $K = 0$.

Așadar are loc

Propoziția 3.3. *Curba paralel generată de un punct de inflexie de pe meridianul generator este formată din puncte parabolice ale suprafeței.*

În demonstrația Propoziției 3.2 am notat că normalele unei suprafețe de rotație în punctele unui meridian sunt conținute în planul osculator al curbei meridian. După Propoziția 3.3 din Cap. 4 rezultă

Propoziția 3.4. *Curbele meridian ale unei suprafețe de rotație sunt geodezice.*

Știm că prin fiecare punct al unei suprafețe trec o infinitate de geodezice, câte una în fiecare direcție în acel punct. Așadar meridianele nu sunt singurele geodezice ale unei suprafețe de rotație.

Pentru a determina și alte geodezice trebuie să folosim ecuațiile diferențiale (3.2) din Cap. 4 ale geodezicilor unei suprafețe.

În cazul de față avem $g_{11} = 1 + \psi'^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = u^2$ și $g^{11} = \frac{1}{1 + \psi'^2}$,
 $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{u^2}$, coeficienții Christoffel sunt dați de

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\psi' \psi''}{1 + \psi'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{1 + \psi'^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0 \end{aligned}$$

iar ecuațiile diferențiale ale geodezicilor sunt

$$(3.13) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\psi' \psi''}{1 + \psi'^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - \frac{u}{1 + \psi'^2} \frac{dv}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0, \end{cases}$$

unde ψ', ψ'' sunt calculate în $u(s)$.

Știm că meridianele $v = v_0$ sunt geodezice. Ecuația a doua din (3.13) este identic verificată dar prima se reduce la $\frac{du^2}{ds^2} + \frac{\psi' \psi''}{1 + \psi'^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 0$, ecuație care permite să calculăm legătura între parametrii u și s (lungime de arc) pe meridiane.

Ecuația a doua din (3.13) are o consecință interesantă.

Propoziția 3.5 (Clairaut). *Fie α mărimea unghiului dintre o linie geodezică și o curbă paralel într-un punct P . Atunci produsul $u \cos \alpha$ este constant pe geodezică.*

Demonstrație. Fie $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right)$ direcția geodezicii. Direcția curbei paralel este $(0, dv)$ iar formula de calcul pentru $\cos \alpha$ dă, în acest caz, având în vedere că vectorul tangent geodezicii are lungimea 1, $\cos \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = u \frac{dv}{ds}$ și deci $u \cos \alpha = u^2 \frac{dv}{ds}$. Rezultă $\frac{d}{ds} (u \cos \alpha) = u^2 \frac{d^2 v}{ds^2} + 2u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = u^2 \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \right) = 0$.

Deci $u \cos \alpha = \text{constant}$ pe geodezică. ■

O mișcare puțin mai complicată a unei curbe în spațiu este una care constă în rotirea curbei în jurul unei drepte și simultan translatarea ei în lungul aceleiași drepte cu o lungime proporțională cu unghiul de rotație. Dacă luăm curba generatoare de ecuații

$$(3.14) \quad x = u, y = 0, z = \psi(u), \quad u > 0$$

și ca axă de rotație Oz , ecuațiile suprafeței obținute prin mișcarea descrisă, numită mișcare elicoidală, sunt

$$(3.15) \quad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \psi(u) + av, \quad u > 0, a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suprafața reprezentată prin (3.15) se numește **suprafață elicoidală**. Recomandăm cititorului să calculeze elementele geometrice ale acestei suprafețe.

§4. Suprafețe riglate și suprafețe desfășurabile

Fie în E^3 raportat la reperul $\mathcal{R} \equiv Oxyz$ o curbă C de ecuație

$$\vec{r} = \vec{a}(u), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad \vec{a}'(u) \neq \vec{0} \text{ pe } I.$$

Considerăm prin punctul ei $A(u_0)$ o dreaptă de vector director \vec{b} care se poate lua de lungime 1. Să presupunem că \vec{b} depinde diferențiabil de u , adică avem $\vec{b}(u)$ cu $\vec{b}^2(u) = 1$. Când u parcurge I , dreapta dată inițial în A variază și descrie, intuitiv vorbind, o suprafață în E^3 , cf. Fig. 27.

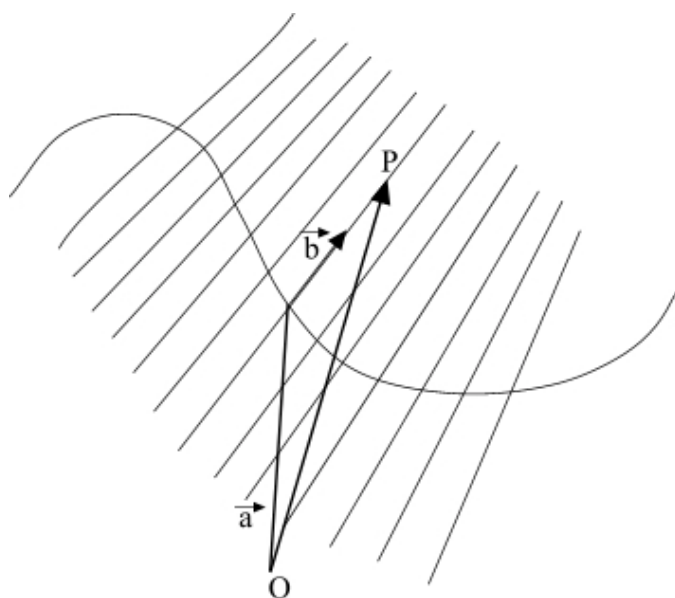


Fig. 27

Un punct P de pe această suprafață are vectorul de poziție $\vec{a}(u) + v\vec{b}(u)$ cu $v \in \mathbb{R}$. Aceste considerații sugerează

Definiția 4.1. Se numește **suprafață riglată** (sau simplu riglată) suprafața care admite o reprezentare parametrică de forma

$$(4.1) \quad \vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u), \quad \vec{b}^2(u) = 1, \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Avem: } \vec{r}_u = \vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u), \quad \vec{r}_v = \vec{b}(u).$$

Pentru ca suprafața riglată (4.1) să fie suprafață în sensul dat în Cap. 3 trebuie să limităm (u, v) la un domeniu din \mathbb{R}^2 în care

$$(4.2) \quad [\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u)] \times \vec{b}(u) \neq \vec{0}.$$

În continuare vom considera și studia suprafețele riglate de ecuație (4.1) care satisfac condiția (4.2). Curbele $u = \text{constant}$ sunt drepte. Ele se numesc generatoarele suprafeței. Curba C se numește **curba directoare** a suprafeței riglate.

Ecuația planului tangent la suprafața riglată (4.1) este

$$(4.3) \quad (\vec{r} - \vec{a}(u) - v\vec{b}(u), \vec{a}'(u) - v\vec{b}'(u), \vec{b}(u)) = 0 \quad (\text{produs mixt}).$$

Propoziția 4.1. Planul tangent la riglată într-un punct conține generatoarea prin acel punct.

Demonstrație. Generatoarea prin $P(u, v)$ are direcția $\vec{b}(u)$. Direcția normală planului tangent este dată de vectorul $\vec{n}(u, v) = [\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u)] \times \vec{b}(u)$. Vectorul $\vec{n}(u, v)$ este perpendicular pe $\vec{b}(u)$ oricare ar fi v . Deci planul tangent prin $P(u, v)$ conține generatoarea prin acest punct. ■

După Propoziția 4.1 planele tangente la riglată în punctele unei generatoare formează un fascicol de plane care are generatoarea ca dreaptă de bază.

Ne punem problema de a găsi condiții în care acest fascicol se reduce la un plan. Pentru aceasta este necesar și suficient ca vectorul $\vec{n}(u_0, v)$ să aibă direcție fixă când variază v . Dar aceasta se întâmplă dacă și numai dacă

$$(4.4) \quad \vec{n}(u_0, v) \times \frac{d\vec{n}}{dv}(u_0, v) = \vec{0}.$$

După un calcul fără dificultăți, în care se folosește formula dublului produs vectorial, se obține că egalitatea (4.4) este echivalentă cu

$$(4.5) \quad (\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)) = 0 \quad (\text{produs mixt}).$$

Definiția 4.2. O suprafață riglată cu proprietatea că planul ei tangent este fix când punctul de contact cu suprafața descrie o generatoare arbitrară se numește **suprafață desfășurabilă**.

Considerațiile ce preced această definiție justifică

Propoziția 4.2. *O suprafață riglată de ecuație (4.1) este desfășurabilă dacă și numai dacă are loc (4.5).*

Condiția (4.5) ne permite să identificăm toate suprafețele desfășurabile. Începem prin a nota că (4.5) are loc dacă $\vec{b}'(u) = \vec{0}$ adică \vec{b} este un versor constant (nu depinde de u). În acest caz generatoarele sunt paralele între ele.

Definiția 4.3. *Se numește **suprafață cilindrică** (generală) suprafața riglată cu generatoarele paralele între ele.*

Așadar suprafețele cilindrice sunt riglate desfășurabile. Condiția (4.5) este satisfăcută și atunci când $\vec{b} \times \vec{b}' = \vec{0}$, condiție care ne spune că vectorul $\vec{b}(u)$ are direcție fixă. Geometric aceasta înseamnă că generatoarele suprafeței riglate sunt paralele între ele deci suprafața este cilindrică.

Presupunem $\vec{b}(u) \times \vec{b}'(u) \neq \vec{0}$. Condiția (4.5) are loc dacă

$$(4.6) \quad \vec{a}'(u) = \alpha(u)\vec{b}(u) + \beta(u)\vec{b}'(u),$$

cu funcțiile α și β unic determinate, fără a fi simultan nule.

Dacă $\beta(u) = 0$, din (4.6) rezultă că $\vec{b}(u)$ este coliniar cu $\vec{a}'(u)$, cu alte cuvinte generatoarele riglatei sunt tangente la curba directoare C . Apare ideea că printre riglatele desfășurabile sunt cele care au generatoarele tangente la o curbă nu neapărat curba directoare. Observăm că ecuația

$$(4.7) \quad \vec{r} = \vec{a}(u) + v(u)\vec{b}(u), \quad \vec{b}^2(u) = 1$$

reprezintă o curbă pe riglata (4.1) care intersectează toate generatoarele suprafeței.

$$\text{Avem: } \vec{r}' = \vec{a}'(u) + v'(u)\vec{b}(u) + v(u)\vec{b}'(u).$$

Condiția ca generatoarele suprafeței să fie tangente la curba (4.7) este să existe o funcție $u \rightarrow \lambda(u)$ încât

$$(4.8) \quad \vec{a}'(u) + v'(u)\vec{b}(u) + v(u)\vec{b}'(u) = \lambda(u)\vec{b}(u).$$

Să presupunem că are loc (4.6), adică riglata este desfășurabilă. Înlocuim $\vec{a}'(u)$ din (4.6) în (4.8). Obținem o combinație liniară de vectori \vec{b} și \vec{b}' care sunt liniar independenți, deci coeficienții combinației liniare trebuie să fie nuli, adică

$$(4.9) \quad \alpha + v' - \lambda = 0, \quad \beta + v = 0.$$

Rezultă $v' = -\beta'$ și

$$(4.10) \quad \lambda = \alpha - \beta'.$$

Așadar dacă riglata este desfășurabilă, adică (4.5) are loc în virtutea presupunerii (4.6), generatoarele riglatei sunt tangente la curba de ecuație (4.7).

Dacă se întâmplă că λ determinat prin (4.10) este zero, atunci curba (4.7) degenerază la un punct prin care trec toate generatoarele.

Definiția 4.4. *Suprafața riglată ale cărei generatoare trec printr-un punct fix se numește **suprafață conică** (con generalizat).*

Am arătat astfel că singurele suprafețe riglate desfășurabile sunt:

- planele,
- suprafețele cilindrice,
- suprafețele conice,
- suprafețele riglate ale căror generatoare sunt tangente la o curbă numită muchie cuspidală.

Observație. Am considerat separat suprafețele plane dar ele sunt evident cazuri particulare ale celorlalte trei categorii de suprafețe desfășurabile.

Fie din nou suprafața riglată de ecuații (4.1) cu condițiile (4.2). Coeficienții primei forme fundamentale sunt

$$(4.11) \quad E = \vec{a}'^2(u) + 2v\langle \vec{a}'(u), \vec{b}'(u) \rangle + v^2, F = \langle \vec{a}'(u), \vec{b}(u) \rangle, G = 1,$$

pentru că $\vec{b}'^2(u) = 1$.

Generatoarele suprafeței ca drepte vor fi asimptote. Cum ele formează o familie (prin fiecare punct al suprafeței trece o generatoare și numai una), urmează că ele constituie una din cele două posibile familii de asimptote ale suprafeței. Generatoarele sunt de ecuații $u = \text{constant}$, adică $du = 0$. Dar pentru ca direcțiile $(0, dv)$ să verifice ecuația liniilor asimptotice trebuie ca în mod necesar să avem $N = 0$. Faptul se confirmă și prin calcul direct pentru că avem $\vec{r}_{vu} = \vec{a}''(u) + v\vec{b}''(u)$, $\vec{r}_{uv} = \vec{b}'(u)$, $\vec{r}_{vv} = 0$.

Așadar coeficienții celei de a doua formă fundamentală sunt

$$(4.12) \quad L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u), \vec{b}(u), \vec{a}''(u) + v\vec{b}''(u)),$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)),$$

$$N = 0,$$

unde $\Delta = E - F^2$.

Curbura totală este dată de formula

$$(4.13) \quad K = \frac{-M^2}{E - F^2}.$$

Cum $E - F^2 > 0$ și M este dat de (4.12), având în vedere (4.5), rezultă

Propoziția 4.3. *Pe o suprafață riglată curbura totală $K(u, v) \leq 0$. Ea este egală cu zero dacă suprafața este desfășurabilă. Punctele unei suprafețe riglate sunt hiperbolice sau parabolice și sunt numai parabolice dacă suprafața este desfășurabilă.*

Întărim Propoziția 4.3 prin

Teorema 4.1. *O suprafață fără puncte planare are curbura totală $K = 0$ dacă și numai dacă este riglată desfășurabilă.*

Demonstrație. După Propoziția 4.3 pentru orice riglată desfășurabilă avem $K = 0$. Reciproc, fie o suprafață cu proprietatea $K = 0$. Alegem o parametrizare încât liniile $u = \text{constant}$ să fie asimptote. În această parametrizare avem $N = 0$ și din $LN - M^2 = 0$ rezultă că $M = 0$. Prin ipoteză $L \neq 0$. Așadar avem $\langle \vec{N}, \vec{r}_v \rangle = 0$ și $\langle \vec{N}, \vec{r}_{uv} \rangle = 0$. Prin derivare parțială a egalităților $\langle \vec{N}, \vec{r}_u \rangle = 0$ și $\langle \vec{N}, \vec{r}_v \rangle = 0$ obținem $\langle \vec{N}_v, \vec{r}_u \rangle = 0$, $\langle \vec{N}_u, \vec{r}_v \rangle = 0$ și $\langle \vec{N}_v, \vec{r}_v \rangle = 0$. Cum \vec{N}_v este perpendicular și pe \vec{N} , în mod necesar $\vec{N}_v = \vec{0}$, deci \vec{N} depinde numai de u , adică $\vec{N}(u, v) = \vec{N}(u)$.

Din $\langle \vec{r}_v, \vec{N} \rangle = 0$ și $\langle \vec{r}_v, \vec{N}_u \rangle = 0$ rezultă că \vec{r}_v este coliniar cu $\vec{N} \times \vec{N}_u$ adică $\vec{r}_v = f(u, v)(\vec{N} \times \vec{N}_u)$ pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Prin integrare în raport cu v obținem

$$(4.14) \quad \vec{r}(u, v) = \vec{a}(u) + V\vec{b}(u),$$

$$\text{cu } \vec{b}(u) = \frac{\vec{N} \times \vec{N}_u}{\|\vec{N} \times \vec{N}_u\|} \text{ și } V = \left(\int f(u, v) dv \right) \|\vec{N} \times \vec{N}_u\|.$$

Așadar S admite o parametrizare de tipul (4.1). Curbele $u = \text{constant}$ (asimptote) sunt evident drepte și constituie o familie de generatoare. Deci S este suprafață riglată. Pe o generatoare oarecare $u = u_0$ avem $\vec{N}(u_0, v) = \vec{N}(u_0) = \text{constant}$ deci planul tangent în punctele generatoarei este fix. Așadar riglata S este desfășurabilă. ■

Observație. Ipoteza că S nu are puncte planare, din Teorema 4.1, este esențială. Există suprafețe cu $K = 0$ care nu sunt riglate. Un exemplu este dat la p. 90-91 în [10].

§5. Suprafețe minimale

Problemă. Dată o curbă închisă C în spațiu să se determine suprafața care are ca frontieră curba C și arie minimă (Fig. 28). Sau să se găsească condiții geometrice pe care o asemenea suprafață trebuie să le satisfacă.

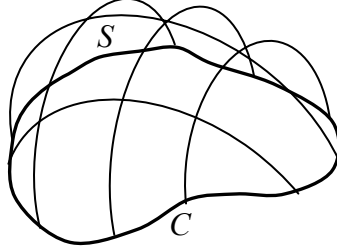


Fig. 28

Pentru a găsi o condiție geometrică pe care trebuie să o satisfacă o suprafață care trece prin C și are arie minimă, fie o suprafață elementară de ecuație

$$(5.1) \quad \vec{r} = \vec{h}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in A \quad \text{mulțime compactă în } \mathbb{R}^2,$$

$\vec{h}_1 \times \vec{h}_2 \neq \vec{0}$ pe A .

Imaginea prin h a frontierei ∂A este curba frontieră C .

Considerăm o variație a acestei suprafețe în direcție normală numită și variație normală, adică o familie de suprafețe reprezentate prin

$$(5.2) \quad \vec{r} = \vec{h}_\varepsilon(u^1, u^2) := \vec{h}(u^1, u^2) + \varepsilon \varphi(u^1, u^2) \vec{N}(u^1, u^2),$$

unde φ este o funcție reală de clasă C^2 care se anulează pe frontiera ∂A (sau pe C). Aceste suprafețe au aceeași frontieră și la $\varepsilon = 0$ se obține suprafața inițială. Pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic, \vec{h}_ε reprezintă într-adevăr o suprafață pentru că avem formulele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{h}_\varepsilon}{\partial u^1} &= \vec{h}_1 + \varepsilon \varphi_{,1} \vec{N} + \varepsilon \varphi \vec{N}_1, \\ \frac{\partial \vec{h}_\varepsilon}{\partial u^2} &= \vec{h}_2 + \varepsilon \varphi_{,2} \vec{N} + \varepsilon \varphi \vec{N}_2, \end{aligned}$$

care ne dau coeficienții formei I-a fundamentale

$$\begin{aligned} g_{ij}^\varepsilon &= \left\langle \frac{\partial \vec{h}_\varepsilon}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{h}_\varepsilon}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij} + \varepsilon \varphi \langle \vec{h}_1, \vec{N}_2 \rangle + \varepsilon^2 \varphi_{,1} \varphi_{,2} + \\ &+ \varepsilon \varphi \langle \vec{N}_1, \vec{h}_2 \rangle + \varepsilon^2 \varphi^2 \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = g_{ij} - 2\varepsilon \varphi b_{ij} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

după calcule și prin folosirea formulelor lui Weingarten.

Continuăm calculele și obținem:

$$\begin{aligned} (5.3) \quad \Delta^\varepsilon &= g_{11}^\varepsilon g_{22}^\varepsilon - (g_{12}^\varepsilon)^2 = \Delta - 2\varepsilon \varphi (g_{11} h_{22} - 2g_{12} h_{12} + g_{22} h_{11}) \\ &+ O(\varepsilon^2) = \Delta - 4\varepsilon \varphi \Delta H + O(\varepsilon^2) = \Delta (1 - 4\varepsilon \varphi H) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

unde H este curbura medie a suprafeței.

Rezultă că pentru $|\varepsilon|$ mic, $\Delta^\varepsilon > 0$ cu φ arbitrar.

Fie $\sigma(\varepsilon) = \iint_A \sqrt{\Delta^\varepsilon} du^1 du^2$ aria suprafeței dată de \vec{h}_ε . Pentru ca suprafața

dată de $\vec{h} := \vec{h}_0$ să fie de arie minimă, o condiție necesară este ca să aibă loc

$$(5.4) \quad \left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \text{ (teorema lui Fermat).}$$

Evaluăm $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$. Avem:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \iint_A \left. \frac{d\sqrt{\Delta^\varepsilon}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 = \iint_A \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left. \frac{d\sqrt{\Delta^\varepsilon}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \stackrel{(5.3)}{=} -2 \iint_A \varphi H \sqrt{\Delta} du^1 du^2.$$

Impunem condiția (5.4), alegem $\varphi = H$ și obținem, $\iint_A H^2 \sqrt{\Delta} du^1 du^2 = 0$,

relație care are loc dacă și numai dacă $H = 0$. Așadar are loc

Teorema 5.1. *O condiție necesară ca aria suprafeței (5.1) să fie mai mică sau egală cu ariile suprafețelor \vec{h}_ε date de orice variație normală (5.2) cu $\left. \vec{h}_\varepsilon \right|_{\partial A} = \vec{h} \Big|_{\partial A}$ este anularea curburii medii H a suprafeței (5.1) pe $A \setminus \partial A$.*

Definiția 5.1. *Suprafețele pentru care curbura medie $H = 0$ se numesc suprafețe minimale.*

Observație. Condiția $H = 0$ ne spune că suprafața \vec{h} dată de (5.1) este “punct staționar” între suprafețele \vec{h}_ε . Se poate arăta că suprafețele cu $H = 0$ minimizează aria doar local. Dar Definiția 5.1 se folosește în forma generală, dată mai sus.

CAPITOLUL 6

Curbe: Probleme

6.1 Enunțuri

6.1 Folosind formula lungimii de arc și ecuațiile parametrice ale unei drepte în spațiu să se obțină formula distanței dintre două puncte din spațiu.

6.2 Folosind formula lungimii de arc și ecuațiile parametrice ale cercului centrat în origine de rază R să se obțină expresia lungimii cercului.

6.3 Se cere lungimea pe $[0, 2\pi]$ a *cicloidei*: $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, unde $R > 0$ este o constantă data.

6.4 Se cere lungimea arcului de curbă $(0, \frac{\pi}{2})$ pentru *astroidă*: $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{r}(t) = R(\cos^3 t, \sin^3 t)$.

6.5 Pentru *spirala logaritmică*: $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\bar{r}(t) = R(e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$, $R, k > 0$ constante, se cer:

(i) să se arate că unghiul dintre $\bar{r}(t)$ și $\bar{r}'(t)$ este constant,

(ii) dacă notăm l_n lungimea arcului de curbă $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ să se arate că raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este constant.

Aceste proprietăți caracterizează spirala logaritmică iar ultima proprietate arată că spirala logaritmică este un exemplu de fractal!

6.6 Fie funcția $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de clasa C^k , $k \geq 1$ și curba grafic: $\bar{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{r}(t) = (t, f(t))$. Să se obțină formula lungimii curbei grafic $L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$. Această formulă apare în Manualul de Analiză Matematică, clasa a XII-a.

6.7 Pentru curba $\bar{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$ să se arate că tangenta, normala principală și binormala formează fiecare un unghi constant cu axa Oz .

6.8 Se cer punctele curbei $\bar{r}(t) = (2t - 1, t^3, 1 - t^2)$ în care planul osculator este perpendicular pe planul $\pi : 7x - 12y + 5z = 0$.

6.9 Se cer curbele $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pentru care tangenta este paralelă cu vectorul $(y(t)z(t), z(t)(x(t) - 1), y(t)(x(t) - 1))$.

6.10 Să se arate că tangentele la curba $\bar{r}(t) = (a \cos t, -a \sin t, be^t)$ intersectează planul xOy după un cerc.

6.11 Se cer punctele curbei $\bar{r}(t) = (\frac{1}{t}, t, 2t^2 - 1)$ în care binormala este perpendiculară pe dreapta $d : \begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$.

6.12 Se cer punctele curbei $\bar{r}(t) = (\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2)$ în care tangenta este paralelă cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

6.13 Să se arate că locul geometric al punctelor de intersecție dintre planul xOy și tangentele la curba $\bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ este o conică C . Să se arate că C este înfășurătoarea dreptelor de intersecție dintre planul xOy și planele osculatoare la curba dată.

6.14 Să se arate că planele normale la curba $\bar{r}(t) = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$ trec prin origine.

6.15 Se cer unghiurile dintre axele de coordonate și tangenta la curba $\bar{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2})$.

6.16 Se cer ecuațiile tangentei și planul normal la curba dată implicit $\Gamma : \begin{cases} x = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

6.17 Se cere planul osculator în punctul $M(1, 1, 1)$ la curba $\Gamma : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$.

6.18 Pentru curbele următoare se cer versorii reperului Frenet, curbura și torsiunea:

(i) $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (1, t, \frac{t^2}{2})$

(ii) (elicea circulară) $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ cu $a, b > 0$

constante

(iii) $\bar{r} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{t}, \sqrt{2} \ln t)$

(iv) $\bar{r} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$

(v) $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$

(vi) $\bar{r} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos \frac{t}{2})$

(vii) $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (a(\sin t + \cos t), a(\sin t - \cos t), be^{-t})$

(viii) $\bar{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}(t) = (ae^t \cos t, ae^t \sin t, be^t)$.

6.19 (Curbe *Țițeica*) O curbă $\bar{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește curbă *Țițeica* dacă funcția $f(t) = \frac{d^2(O, \pi_{osc}(t))}{\tau(t)}$ este constantă, unde

$d(O, \pi_{osc}(t))$ este distanța de la originea O la $\pi_{osc}(t)$ = planul osculator în $\bar{r}(t)$ iar $\tau(t)$ este torsiunea în $\bar{r}(t)$. Să se arate că:

$$f(t) = \frac{(\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'')^2}{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}.$$

Să se arate că următoarele curbe sunt curbe Țițeica:

- (i) $\bar{r}(t) = (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, t^3), t > 0$
- (ii) $\bar{r}(t) = (e^{-2t}, e^t \cos(\sqrt{3}t), e^t \sin(\sqrt{3}t)).$

6.20 Să se arate că următoarele curbe sunt curbe plane și se cere planul osculator (care le conține):

- (i) $\bar{r}(t) = (\sin t, 2 \cos(\frac{\pi}{4} - t), 1 + \cos t)$
- (ii) $\bar{r}(t) = (t^2 - 1, t^2, -\ln t), t \in (0, +\infty)$
- (iii) $\bar{r}(t) = (t^2(2t+1), t(t-2), t(t^2+1)-1).$

6.21 Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă $C^k, k > 1$ și curba grafic $\bar{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \bar{r}(t) = (t, f(t))$. Să se arate că: $k(t) = \frac{f''(t)}{(1+(f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6.22 Fie o curbă plană definită implicit de ecuația $F(x, y) = 0$. Să se arate că: $k(x, y) = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\Delta}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}$ unde Δ este

determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$.

Folosind această formulă se cere:

- (i) să se reobțină curbura cercului de rază R centrat în origine.
- (ii) curbura elipsei
- (iii) curbura hiperbolei
- (iv) curbura parabolei $y^2 = 2px$
- (v) să se arate că dacă $\bar{n} = (n_1, n_2)$ este versorul normalei atunci avem următoarea formulă pentru curbura: $k = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} = \text{div} \bar{n}$.

6.23 Aplicația $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, J(x, y) = (-y, x)$ se numește *structura complexă a planului*. Să se arate că:

- (i) J este endomorfism liniar al spațiului vectorial \mathbb{R}^2
- (ii) $J^2 = -Id$ unde Id este aplicația identică a lui \mathbb{R}^2 (această relație motivează denumirea lui J)
- (iii) J este *aplicație ortogonală* i.e. $\langle Jp, Jq \rangle = \langle p, q \rangle$ pentru orice $p, q \in \mathbb{R}^2$. Cu transformarea $q \rightarrow Jq$ rezultă că J este antisimetrică i.e. $\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle$
- (iv) $\langle Jp, p \rangle = 0$ i.e. Jp este ortogonal pe p .

Identificând planul \mathbb{R}^2 cu mulțimea numerelor complexe să se arate că:

(v) $Jp = +i \cdot p$

(vi) $p \cdot \bar{q} = \langle p, q \rangle + i \langle p, Jq \rangle = \langle p, q \rangle - i \langle Jp, q \rangle$.

Să se arate că matricea lui J este $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ și să se verifice pe această matrice proprietățile (ii), (iii), (iv).

(vii) De ce sensul orar este opus sensului trigonometric?

6.24 (i) Să se arate că pentru o curbă plană $\bar{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ expresia curburii este:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\langle J\bar{r}'(t), \bar{r}''(t) \rangle}{\|\bar{r}'(t)\|^3}.$$

(ii) Folosind formula precedentă să se arate că pentru o curbă parametrizată canonic, i.e. $\|\bar{r}'(s)\| = 1$ pentru orice $s \in (a, b)$, avem: $\bar{r}''(s) = +k(s)J\bar{r}'(s)$.

6.25 Folosind formula din exercițiul precedent se cere curbura pentru:

(i) elipsa $E : \bar{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$

(ii) hiperbola $H : \bar{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$

(iii) $\bar{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$

(iv) spirala logaritmică,

(v) cicloida,

(vi) astroida.

6.26 Folosind exercițiul 6.22 se cere curbura pentru:

(i) $C : xy = a^2$

(ii) $C : x^3 - y^3 + 2xy = 0$ în punctul $M(1, -1)$

(iii) $C : 3ay^2 - 2x^3 = 0$.

6.27 Dată curba plană C în coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ cu $\rho = \rho(\varphi)$ să se arate că C are curbura

$$k(\varphi) = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aplicând această relație se cere curbura următoarelor curbe:

(i) (lemniscata) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

(ii) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

(iii) $\rho = a \sin 4\varphi$.

6.28 (Curbe cilindrice) (i) Să se definească și să se studieze (după modelul exercițiului 6.21) curbele cilindrice.

(ii) Să se determine curbele cilindrice Țițeica.

6.29 (*Formule Frenet generalizate*) Notăm cu E unul din următoarele corpuri: \mathbb{R} al numerelor reale, \mathbb{C} al numerelor complexe, \mathbb{H} al cuaternionilor. Dându-se numărul natural impar n și o curbă în spațiul E^n se cer formulele Frenet corespunzătoare.

6.30 (*Noduri olonome*) O curbă în spațiu $t \rightarrow \bar{r}(t)$ se numește *nod olonom* dacă există o funcție periodică $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{r}'(t) = (-f(t), f'(t), -f''(t)).$$

A) Să se studieze nodurile olonome și să se figureze pentru:

- (i) $f(t) = \cos t$
- (ii) $f(t) = \sin t$.

B) Să se studieze cazul când există numerele reale a, b așa încât: $f'' = af' + bf$.

6.31 (*Curbe sferice*) Fie în spațiu curba $C: \bar{r} = \bar{r}(s)$ parametrizată canonic și având curbura k respectiv torsiunea τ .

(i) Fie punctul $\bar{r}(s_0) \in C$ cu $\tau(s_0) \neq 0$. Să se arate că sfera ce trece prin $\bar{r}(s_0)$ și este centrată în punctul

$$\bar{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\bar{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}\bar{b}(s_0)$$

are contact de ordinul 3 cu C . Această sferă este unic determinată cu aceste proprietăți și se numește *sfera osculatoare* în $\bar{r}(s_0)$.

(ii) Să se arate că C este situată pe o sferă dacă și numai dacă are loc relația:

$$\frac{\tau}{k} = \left(\frac{k'}{k^2\tau} \right)'.$$

(iii) Presupunem C situată pe sfera unitate S^2 și notăm $J := \text{Det}(\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'')$.

Avem atunci:

$$\begin{cases} k = \sqrt{1 + J^2} \\ \tau = \frac{J'}{1 + J^2} \end{cases}.$$

Cercurile mari sunt caracterizate de $J = 0$ iar alte cercuri de $J = \text{constant}$.

6.2 Soluții

6.1 Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ și dreapta care le unește. Ecuația lui d este:

$\bar{r}(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1), z_1 + t(z_2 - z_1))$. Punctul M_1 corespunde lui $t = 0$ iar punctul M_2 lui $t = 1$ deci: $d(M_1, M_2) = \int_0^1 \|\bar{r}'(t)\| dt =$
 $\int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} dt =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

6.2 Cum ecuația cercului este: $\bar{r}(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in (0, 2\pi)$

rezultă: $L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R$.

6.3 $L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 (1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} =$
 $8R$.

6.4 $L(C) = 3R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 t \sin t)^2 + (\sin^2 t \cos t)^2} dt = \frac{3}{2}R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt =$
 $-\frac{3}{4}R \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}R$.

Fig.1 Astroida cu $R = 3$

6.5 (i) $\bar{r}' = Re^{kt} (k \cos t - \sin t, k \sin t + \cos t), \|\bar{r}'\| = Re^{kt} \sqrt{k^2 + 1}, \|\bar{r}\| = Re^{kt}$ și deci $\cos \angle(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ deoarece $\langle \bar{r}, \bar{r}' \rangle = R^2 k e^{2kt}$.

(ii) $a_n = R \sqrt{k^2 + 1} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{kt} dt = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} R (e^{2(n+1)k\pi} - e^{2nk\pi})$ de unde
 rezulta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{2k\pi} = \text{const} > 1$.

Fig.2 Spirala logaritmică cu $R = \frac{1}{3}, k = \frac{1}{7}$

6.6 Deoarece $\bar{r}'(t) = (1, f'(t))$ avem imediat concluzia.

6.7 Fie α, β, γ unghiurile formate de tangentă, normala principală și binormala cu versorul director \bar{k} al axei Oz . Avem:

$$\bar{r}' = e^t (\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1), \bar{r}'' = e^t (2 \cos t, 2 \sin t, 1), \|\bar{r}'\| = \sqrt{3}e^t$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = e^{2t} (\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = \sqrt{6}e^{2t}$$

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}' = e^{3t} (3(\cos t - \sin t), -3(\cos t + \sin t), 0), \|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'\| = 3\sqrt{2}e^{3t}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\langle \bar{r}', \bar{k} \rangle}{\|\bar{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos \beta = \frac{\langle (\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}', \bar{k} \rangle}{\|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'\|} = 0 \\ \cos \gamma = \frac{\langle \bar{r}' \times \bar{r}'', \bar{k} \rangle}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases} .$$

6.8 Normala la planul π este: $\bar{N}(\pi) = (7, -12, 5)$ iar normala la planul osculator este binormala $\bar{r}' \times \bar{r}''$. Avem:

$$\bar{r}' = (2, 3t^2, -2t), \bar{r}'' = (0, 6t, -2), \bar{r}' \times \bar{r}'' = 2(3t^2, 2, 6t).$$

Din condiția: $0 = \langle \bar{N}(\pi), \bar{r}' \times \bar{r}'' \rangle = 21t^2 + 30t - 24 = 3(7t^2 + 10t - 8)$ obținem: $t_1 = -2, t_2 = \frac{4}{7}$. Avem:

$$\pi_{osc}(1) : 6x + y - 6z + 20 = 0, \pi_{osc}(2) : \frac{24}{49}x + y + \frac{12}{7}z - \frac{66}{49} = 0.$$

6.9 Avem sistemul diferențial:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{z(x-1)} = \frac{dz}{y(x-1)}.$$

Din prima și ultima fracție avem integrala: $\frac{x^2}{2} - x = \frac{z^2}{2} + c_1$, iar din ultimele două fracții avem integrala: $y^2 - z^2 = c_2$. Prin urmare avem familia 2-parametrică de curbe $C(c_1, c_2) : \begin{cases} x^2 - z^2 - 2x - c_1 = 0 \\ y^2 - z^2 - c_2 = 0 \end{cases}$.

6.10 Ecuația tangentei este: $\frac{x-a \cos t}{-a \sin t} = \frac{y+a \sin t}{-a \cos t} = \frac{z-be^t}{be^t}$. Făcând $z=0$ obținem $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = a(\cos t - \sin t) \end{cases}$ care este cercul $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 = 2$ în planul xOy .

6.11 Scriind dreapta sub forma $d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$ rezultă că vectorul direc-

tor al dreptei este $\bar{a} = (1, -1, 4)$. Deoarece:

$$\bar{r}' = \left(-\frac{1}{t^2}, 1, 4t\right), \bar{r}'' = \left(\frac{2}{t^3}, 0, 4\right)$$

rezultă că vectorul binormalei este: $\bar{r}' \times \bar{r}'' = 2\left(2, \frac{6}{t^2}, -\frac{1}{t^2}\right)$. Din condiția $\langle \bar{a}, \bar{r}' \times \bar{r}'' \rangle = 0 = 2 - \frac{6}{t^2} - \frac{4}{t^3}$ rezultă ecuația $t^3 - 3t - 2 = 0$ cu soluțiile: $t_1 = t_2 = -1, t_3 = 2$ deci punctele $P_1(-1, -1, 1), P_2(\frac{1}{2}, 2, 7)$.

6.12 Normala la π este: $\bar{N}(\pi) = (3, -2, -2)$ și deci tangenta la curbă, $\bar{r}'(t) = (2t^3, -t^2, 2t)$ trebuie să fie perpendiculară pe acest vector. Din $\langle \bar{N}(\pi), \bar{r}'(t) \rangle = 0 = 2t(3t^2 + t - 2)$ rezultă: $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = \frac{2}{3}$. Dar în punctul t_1 avem $\bar{r}'(0) = \bar{0}$ ceea ce contrazice regularitatea curbei deci singurele soluții valabile rămân t_2 și t_3 cu $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1), P_3(\frac{8}{81}, -\frac{8}{81}, \frac{4}{9})$.

6.13 Tangenta este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-t^3}{3t^2}$ și deci intersecția acestei tangente cu xOy este $C : \begin{cases} x = \frac{2t}{3} \\ y = \frac{t^2}{3} \end{cases}$. Prin eliminarea lui t obținem $C : y = \frac{3}{4}x^2$

care este o parabolă. Planul osculator este $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} =$

0 și să notăm cu $\Gamma_t = \pi_{osc} \cap xOy : \begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & -t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$. La final

obținem $\Gamma_t : 3y - 3tx + t^2 = 0$.

Reamintim că dată familia de curbe $\Gamma_t : F(x, y, t) = 0$ numim *înfășurătoare* a acestei familii, curba $\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ F_t(x, y, t) = 0 \end{cases}$. În cazul de față $F_t = -3x + 2t = 0$ implică $t = \frac{3}{2}x$ și înlocuind această expresie în ecuația lui Γ_t obținem $y = \frac{3}{4}x^2$ ceea ce voiam.

6.14 Deoarece $\bar{r}'(t) = (\sin 2t, \cos 2t, -\sin t)$ avem planul normal $\pi_{nor} : \sin 2t(x - \sin^2 t) + \cos 2t(y - \frac{1}{2}\sin 2t) - \sin t(z - \cos t) = 0$ și în final $\pi_{nor} : \sin 2tx + \cos 2ty - \sin tz = 0$. Deoarece termenul liber din ecuația lui π_{nor} este nul rezultă că originea aparține planului normal.

6.15 Fie $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ unghiul făcut de tangentă $\bar{r}'(t)$ cu axele $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Avem: $\bar{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 2\cos \frac{t}{2})$ și $\|\bar{r}'(t)\| = 2$ de unde rezultă: $\cos \alpha(t) = \sin^2 \frac{t}{2}, \cos \beta(t) = \frac{1}{2}\sin t, \cos \gamma(t) = \cos \frac{t}{2}$.

6.16 Cu notația $x = t$ obținem $y = t, z = 2t^2$ și deci avem curba C: $\bar{r}(t) = (t, t, 2t^2)$. Ecuația tangentei este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t}{1} = \frac{z-2t^2}{4t}$ iar planul normal este $\pi_{nor} : x + y + 4tz - 2t - 8t^3 = 0$.

6.17 Mai întâi observăm că punctul dat este pe curbă. Cu substituția $y = t$ rezultă: $x = t^2, z = t^4$ și deci avem curba $C : \bar{r}(t) = (t^2, t, t^4)$ cu planul

osculator $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$ și în final $\pi_{osc} : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

6.18

(i)

$$\bar{r}' = (0, 1, t), \bar{r}'' = (0, 0, 1), \bar{r}''' = (0, 0, 0)$$

$$\|\bar{r}'\| = \sqrt{1+t^2}, \bar{r}' \times \bar{r}'' = (1, 0, 0), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = 1, (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = 0$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, 1, t) \\ \bar{b}(t) = (1, 0, 0) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, -t, 1) \\ k(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(t) = 0 \end{cases}.$$

(ii)

$$\bar{r}' = (-a \sin t, a \cos t, b), \bar{r}'' = (-a \cos t, -a \sin t, 0), \bar{r}''' = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

$$\|\bar{r}'\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \bar{r}' \times \bar{r}'' = a(b \sin t, -b \cos t, a), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = a^2b$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a) \\ \bar{n}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ k(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Deci curbura și torsiunea elicei sunt constante (și proporționale).

(iii)

$$\bar{r}' = \frac{1}{2} \left(1, -\frac{1}{t^2}, \frac{\sqrt{2}}{t} \right), \bar{r}'' = \frac{1}{2} \left(0, \frac{2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}}{t^2} \right), \bar{r}''' = \frac{1}{2} \left(0, -\frac{6}{t^4}, \frac{2\sqrt{2}}{t^3} \right), \|\bar{r}'\| = \frac{1}{2t^2} (1+t^2)$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \frac{1}{4t^4} (-\sqrt{2}, \sqrt{2}t^2, 2t), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = \frac{\sqrt{2}}{4t^4} (1+t^2), (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -\frac{\sqrt{2}}{4t^6}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{1+t^2} (t^2, -1, \sqrt{2}t) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{1+t^2} (-1, t^2, \sqrt{2}t) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{1+t^2} (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1-t^2) \\ k(t) = \frac{2\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2} \\ \tau(t) = -\frac{2\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}.$$

(iv)

$$\bar{r}' = \left(2, \frac{1}{t}, 2t \right), \bar{r}'' = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2 \right), \bar{r}''' = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0 \right), \|\bar{r}'\| = \frac{2t^2+1}{t}$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \frac{2}{t^2} (2t, -2t^2, -1), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = \frac{2}{t^2} (1+2t^2), (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -\frac{8}{t^3}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (2t, 1, 2t^2) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (2t, -2t^2, 1) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (1-2t^2, -2t, 2t) \\ k(t) = \frac{2t}{(2t^2+1)^2} \\ \tau(t) = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2} \end{cases}.$$

(v)

$$\bar{r}' = (1, 2t, 2t^2), \bar{r}'' = (0, 2, 4t), \bar{r}''' = (0, 0, 4), \|\bar{r}'\| = 2t^2+1$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = 2(2t^2, -2t, 1), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = 2(2t^2+1), (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = 8$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (1, 2t, 2t^2) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (2t^2, -2t, 1) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{2t^2+1} (-2t, 1-2t^2, 2t) \\ k(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2} \\ \tau(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2} \end{cases}.$$

(vi)

$$\bar{r}' = \left(1 - \cos t, \sin t, -2 \sin \frac{t}{2}\right), \bar{r}'' = \left(\sin t, \cos t, -\cos \frac{t}{2}\right),$$

$$\bar{r}''' = \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}\right)$$

$$\|\bar{r}'\| = 2\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}, \bar{r}' \times \bar{r}'' = -2 \sin^2 \frac{t}{2} \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}, 1\right)$$

$$\|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = 2\sqrt{2} \sin^2 \frac{t}{2}, (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \sin^3 \frac{t}{2}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}, -1\right) \\ \bar{b}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}, 1\right) \\ \bar{n}(t) = \left(\cos \frac{t}{2}, -\sin \frac{t}{2}, 0\right) \\ k(t) = \frac{1}{8 \sin \frac{t}{2}} \\ \tau(t) = \frac{1}{8 \sin \frac{t}{2}} \end{cases}.$$

(vii)

$$\bar{r}' = (a(\cos t - \sin t), a(\cos t + \sin t), -be^{-t}), \|\bar{r}'\| = \sqrt{2a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\bar{r}'' = (a(-\sin t - \cos t), a(\cos t - \sin t), be^{-t})$$

$$\bar{r}''' = (a(\sin t - \cos t), a(\cos t + \sin t), -be^{-t}), (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -4a^2be^{-t}$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = 2a(be^{-t} \cos t, be^{-t} \sin t, a), \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = 2a\sqrt{a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2a^2 + b^2e^{-2t}}} (a(\cos t - \sin t), a(\sin t + \cos t), -be^{-t}) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2e^{-2t}}} (be^{-t} \cos t, be^{-t} \sin t, a) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{(2a^2 + b^2e^{-2t})(a^2 + b^2e^{-2t})}} \begin{pmatrix} -a^2 \cos t - (a^2 + b^2e^{-2t}) \sin t, \\ (a^2 + b^2e^{-2t}) \cos t - a^2 \sin t, a be^{-t} \end{pmatrix} \\ k(t) = \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2e^{-2t}}}{(2a^2 + b^2e^{-2t})^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(t) = -\frac{be^{-t}}{a^2 + b^2e^{-2t}} \end{cases}.$$

(viii)

$$\bar{r}' = e^t (a (\cos t - \sin t), a (\sin t + \cos t), b), \bar{r}'' = e^t (-2a \sin t, 2a \cos t, b)$$

$$\bar{r}''' = e^t (-2a (\cos t + \sin t), 2a (\cos t - \sin t), b),$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = ae^{2t} (b (\sin t - \cos t), -b (\cos t + \sin t), 2a), (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = 2a^2 be^{3t}$$

$$\|\bar{r}'\| = e^t \sqrt{2a^2 + b^2}, \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = \sqrt{2} ae^{2t} \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} \bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}} (a (\cos t - \sin t), a (\sin t + \cos t), b) \\ \bar{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2a^2+b^2)}} (b (\sin t - \cos t), -b (\sin t + \cos t), 2a) \\ \bar{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (- (\sin t + \cos t), \cos t - \sin t, 0) \\ k(t) = \frac{\sqrt{2}a}{e^t(2a^2+b^2)} \\ \tau(t) = \frac{be^{-t}}{2a^2+b^2} \end{cases}.$$

$$\mathbf{6.19} \text{ Avem } \pi_{osc}(t) : \begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \text{ Notând}$$

A, B, C minorii corespunzatori elementelor din linia întâi rezultă:

$$d^2(O, \pi_{osc}(t)) = \frac{(\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'')^2}{A^2+B^2+C^2} \text{ și } \tau(t) = \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{A^2+B^2+C^2} \text{ de unde relația cerută.}$$

$$(i) \text{ Obținem } (\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'') = \frac{20}{t^3}, (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -\frac{120}{t^6}, f = -\frac{10}{3}.$$

Observație: Curba dată se află pe suprafața Țițeica (ii) de la exercițiul 7.31.

$$(ii) (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -8 \cdot 12\sqrt{3}, d^2(O, \pi_{osc}) = 12^2 \cdot 3, f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6.20 Arătăm că $\bar{b}(t) = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|}$ este versor constant de unde obținem că acea curbă este plană și totodată ecuația planului osculator.

$$(i) \bar{r}' = (\cos t, 2 \sin(\frac{\pi}{4} - t), -\sin t), \bar{r}'' = -(\sin t, 2 \cos(\frac{\pi}{4} - t), \cos t), \bar{r}' \times \bar{r}'' = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \text{ deci concluzia și } \pi_{osc} : \sqrt{2}x - y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0.$$

$$(ii) \bar{r}' = (2t, 2t, -\frac{1}{t}), \bar{r}'' = (2, 2, \frac{1}{t^2}), \bar{r}' \times \bar{r}'' = \frac{4}{t} (1, -1, 0) \text{ de unde concluzia și } \pi_{osc} : x - y + 1 = 0.$$

$$(iii) \bar{r}' = (6t^2 + 2t, 2t - 2, 3t^2 + 1), \bar{r}'' = (12t + 2, 2, 6t), \bar{r}' \times \bar{r}'' = 2(3t^2 - 6t - 1)(1, -1, 2) \text{ de unde concluzia și } \pi_{osc} : x - y - 2z - 2 = 0.$$

6.21 Avem $\bar{r}' = (1, f'(t)), \bar{r}'' = (0, f''(t))$ și aplicăm, spre exemplu, punctul (i) de la problema 6.24.

6.22 Calcul imediat folosind exercițiul precedent și faptul că din relația $F(t, f(t)) = 0$ rezultă $f' = -\frac{F_x}{F_y}$ și $f'' = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{F_y^3}$.

$$(ii) k(x, y) = -\frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(iii) \quad k(x, y) = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(iv) \quad \text{Folosind funcția } F(x, y) = 2px - y^2 \text{ avem } k(x, y) = \frac{p^2}{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

6.23 (i)-(vi) Verificări imediate.

(vii) Datorită punctului (v) putem spune că sensul trigonometric corespunde lui J .

Sensul orar este descris de ceas care este un oscilator armonic. Din legea a II-a a dinamicii $\overline{F} = m\overline{a}$ cum $\overline{F} = -kx$ iar $\overline{a} = \ddot{x}$ rezultă ecuația generală a oscilatorului armonic: $m\ddot{x} + kx = 0$ unde k este constanta elastică. Notând pulsația $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ecuația precedentă devine: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Dar ceasul are $\omega = 1$ bătând secunda și deci ecuația ce guvernează ceasul este: $\ddot{x} + x = 0$ care se poate scrie, reducând la ordinul întâi:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

sau înca:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

În concluzie ceasul este descris de $(-J)$ ceea ce explică faptul că sensul orar este opus sensului trigonometric.

6.24 (i) Se verifică imediat. (ii) Din $\|\bar{r}(s)\|^2 = 1$ rezultă prin derivare $\langle \bar{r}''(s), \bar{r}'(s) \rangle = 0$ deci $\bar{r}''(s)$ este vector paralel cu $J\bar{r}'(s)$ și obținem că factorul de proporționalitate este $+k(s)$.

6.25 (i) $\bar{r}' = (-a \sin t, b \cos t)$, $\bar{r}'' = (-a \cos t, -b \sin t)$,
 $k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0) = \frac{a}{b^2}$, $k(\frac{\pi}{2}) = \frac{b}{a^2}$, $k(\frac{\pi}{4}) = \frac{ab}{(\frac{a^2+b^2}{2})^{\frac{3}{2}}}$.

(ii) $\bar{r}' = (asht, bcht)$, $\bar{r}'' = (acht, bsht)$, $k(t) = \frac{-ab}{(a^2 sh^2 t + b^2 ch^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0) = -\frac{a}{b^2}$ și $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t) = 0$ ceea ce confirmă faptul că hiperbola are asimptote!

$$(iii) \quad \bar{r}' = (t \cos t, t \sin t), \bar{r}'' = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t), k(t) = \frac{1}{t}$$

$$(iv) \quad k(t) = \frac{e^{-kt}}{R\sqrt{k^2+1}}$$

$$(v) \quad k(t) = \frac{-1}{4R \sin \frac{t}{2}}$$

Fig. 3 Cicloida cu $R = 1$ pentru $t \in (-5, 5)$.

$$(vi) \ k = -\frac{1}{3R \sin t \cos t}.$$

$$\mathbf{6.26} \ (i) \ k(x, y) = \frac{-2a^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Fig. 4 Hiperbola echilaterală cu $a = 2$ cu $x, y \in (-5, 5)$.

$$(ii) \ k(1, -1) = 4\sqrt{2}$$

$$(iii) \ k(x, y) = \frac{-a\sqrt{3}}{\sqrt{x(3x+2a)}}.$$

6.27 Folosim formula de la exercițiul 6.24 (i) și relațiile imediate:

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \\ y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \rho'' \cos \varphi - 2\rho' \sin \varphi - \rho \cos \varphi \\ y'' = \rho'' \sin \varphi + 2\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \end{cases}.$$

Astfel avem că $x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad k(\varphi) &= \frac{3}{a} \sqrt{\cos 2\varphi} \\ \text{(ii)} \quad k(\varphi) &= \frac{4}{3a \sin^2 \frac{\varphi}{3}} \\ \text{(iii)} \quad k(\varphi) &= \frac{17+15 \cos^2 4\varphi}{a(1+15 \cos^2 4\varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Fig. 5 Curba dată cu $a = 1$ și $\varphi \in (-5, 5)$.

6.28 (i)

A) *Curbele cilindrice eliptice* au reprezentarea:

$$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$$

pentru $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Au fost folosite de Gheorghe Vrânceanu (1900-1979) în conexiune cu teoremele Levi-Civita și Fenchel din teoria suprafețelor în:

Vrânceanu, Gh., *Sur les courbes cylindriques fermées*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 21(1976), no. 5, 601-607.

Rezultă:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, f'(t)) \\ \bar{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, f''(t)) \\ \bar{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

și deci:

$$\bar{t}(t) := \frac{\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}} (-\sin t, \cos t, f'(t)).$$

Din:

$$\begin{aligned}\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin t & \cos t & f'(t) \\ -\cos t & -\sin t & f''(t) \end{vmatrix} = \\ &= (f''(t) \cos t + f'(t) \sin t, f''(t) \sin t - f'(t) \cos t, 1) \\ \|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\| &= \sqrt{1 + f'^2(t) + f''^2(t)}\end{aligned}$$

rezultă:

$$\begin{aligned}\bar{b}(t) &:= \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}} (f'' \cos t + f' \sin t, f'' \sin t - f' \cos t, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + f'^2)(1 + f'^2 + f''^2)}} \bar{n}(t) = \\ &= (f' f'' \sin t - (1 + f'^2) \cos t, -f' f'' \cos t - (1 + f'^2) \sin t, f'') \\ k(t) &:= \frac{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|}{\|\bar{r}'\|^3} = \frac{1}{1 + f'^2} \sqrt{\frac{1 + f'^2 + f''^2}{1 + f'^2}}.\end{aligned}$$

În determinantul:

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & f' \\ -\cos t & -\sin t & f'' \\ -\sin t & -\cos t & f''' \end{vmatrix}$$

adunăm ultima linie la prima:

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f' + f'' \\ -\cos t & -\sin t & f'' \\ -\sin t & -\cos t & f''' \end{vmatrix} = f' + f'''$$

ceea ce dă:

$$\tau(t) := \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} = \frac{f' + f'''}{1 + f'^2 + f''^2}.$$

Exemple. În lucrarea citată la începutul soluției sunt date două exemple:

(1) $f(t) = \cos 2t$ (pag. 605)

(2) $f(t) = \sin 2t$ (pag. 607)

B) *Curbele cilindrice hiperbolice* au reprezentarea:

$$\bar{r}(t) = (cht, sht, f(t)).$$

După un calcul analog celui precedent obținem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (sht, cht, f'(t)) \\ \bar{r}''(t) = (cht, sht, f''(t)) \\ \bar{r}'''(t) = (sht, cht, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2(t)}$$

$$\bar{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2(t)}} (sht, cht, f'(t))$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = (f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1)$$

$$\|\bar{r}' \times \bar{r}''\| = \sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}$$

$$\bar{b}(t) = \frac{1}{\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|} (f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1)$$

$$\|\bar{r}'\| \|\bar{r}' \times \bar{r}''\| \bar{n}(t) =$$

$$= \left((f'^2 + 1)cht - f'f''sht, (f'^2 - 1)sht - f'f''cht, f''\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} - f'\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \right)$$

$$k(t) = \frac{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}{(ch^2t + sh^2t + f'^2)\sqrt{ch^2t + sh^2t + f'^2}}.$$

Din:

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ sht & cht & f''' \end{vmatrix} \stackrel{\text{linia 3} - \text{linia 1}}{=} \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ 0 & 0 & f''' - f' \end{vmatrix} = f' - f'''$$

rezultă:

$$\tau(t) = \frac{f' - f'''}{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}.$$

(ii)

A) Avem că distanța de la origine la planul osculator este:

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{|(f'' \cos t + f' \sin t)(-\cos t) + (f'' \sin t - f' \cos t)(-\sin t) - f|}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}} = \\ &= \frac{\pm(f + f'')}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}}. \end{aligned}$$

Presupunem satisfăcută condiția Țițeica cu constanta $K \neq 0$, deoarece curba nu este într-un plan:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f'(t) + f'''(t)}{(f(t) + f''(t))^2}.$$

Prin integrare rezultă:

$$\frac{1}{f(t) + f''(t)} = -(Kt + C)$$

cu C o constantă reală. Scriem ultima relație sub forma:

$$f''(t) + f(t) = \frac{-1}{Kt + C}.$$

Dar această ecuație diferențială este exact de tipul oscilatorului armonic forțat ("forced harmonic oscillator"):

$$\ddot{x}(t) + x(t) = g(t)$$

care are soluția generală:

$$x(t) = x(0) \cos t - \dot{x}(0) \sin t + \int_0^t g(u) \sin(u - t) du$$

În concluzie:

O curbă cilindrică eliptică este Țițeica dacă și numai dacă:

$$f(t) = f(0) \cos t - \dot{f}(0) \sin t - \int_0^t \frac{\sin(u - t)}{Ku + C} du$$

cu $f(0), \dot{f}(0), K \neq 0, C$ constante reale.

B) Avem:

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{|(f''cht - f'sht)(-cht) + (f'cht - f''sht)(-sht) + f|}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}} = \\ &= \frac{\pm(f - f'')}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}. \end{aligned}$$

Dacă avem condiția Tîțica:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f' - f'''}{(f - f'')^2}$$

o integrare dă:

$$\frac{1}{f - f''} = -(Kt + C)$$

sau încă:

$$f'' - f = \frac{1}{Kt + C}.$$

Folosind identitatea:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \operatorname{cht} & \operatorname{sht} \\ \operatorname{sht} & \operatorname{cht} \end{pmatrix}$$

rezultă:

O curbă cilindrică hiperbolică este Tîțica dacă și numai dacă:

$$f(t) = f(0) \operatorname{cht} + f'(0) \operatorname{sht} + \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(t+u)}{Ku + C} du$$

cu $f(0), f'(0), K \neq 0$ și C constante reale.

Rezolvarea acestui punct urmărește lucrarea:

Crâșmăreanu, M., *Cylindrical Tzitzeica curves implies harmonic oscillators*, Balkan J. of Geometry and Its Applications, 7(2002), no. 1, 37-43.

6.29 Pe spațiul E^n avem produsul scalar:

$$E^n \times E^n \ni (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i \bar{y}^i \in E$$

unde am notat $x = (x^1, \dots, x^n)$ iar prin \bar{x}^i conjugatul lui x^i . Definim atunci $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

În lucrarea:

Wong, Y. C., *Frenet formulas for curves in real, complex and quaternionic euclidian spaces*, Differential geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Japan, 1972, 525-545,

este demonstrată următoarea:

Propoziție. Fie în E^n cu n impar, o curbă de clasă C^∞ , parametrizată canonic $C : x = x(s)$. Presupunem că vectorii $\frac{dx}{ds}(s), \dots, \frac{d^n x}{ds^n}(s)$ sunt liniari independenți pentru orice s . Atunci există un unic reper ortonormat $\{e_1, \dots, e_n\}$ de-a lungul lui C satisfăcând ecuațiile:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = e_1 \\ \frac{de_1}{ds} = h_1 e_1 + k_1 e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -k_1 e_1 + h_2 e_2 + k_2 e_3 \\ \dots \\ \frac{de_{n-1}}{ds} = -k_{n-2} e_{n-2} + h_{n-1} e_{n-1} + k_{n-1} e_n \\ \frac{de_n}{ds} = -k_{n-1} e_{n-1} + h_n e_n \end{cases}$$

unde:

(i) funcțiile $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$ sunt cu valori reale, $k_1 > 0, \dots, k_{n-2} > 0$

(ii) funcțiile $h_1(s), \dots, h_n(s)$ sunt cu valori în E și au părțile reale nule.

Funcțiile k_1, \dots, k_{n-1} se numesc *curburi primare* iar funcțiile h_1, \dots, h_n se numesc *curburi secundare*.

6.30 A) Avem:

$$\begin{cases} \bar{r}'(t) = (-f', f'', -f''') \\ \bar{r}''(t) = (-f'', f''', -f^{(iv)}) \\ \bar{r}'''(t) = (-f''', f^{(iv)}, -f^{(v)}) \end{cases}$$

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = (f'''^2 - f'' f^{(iv)}, f'' f''' - f' f^{(iv)}, f''^2 - f' f''')$$

$$\|\bar{r}' \times \bar{r}''\|^2 = (f'''^2 - f'' f^{(iv)})^2 + (f'' f''' - f' f^{(iv)})^2 + (f''^2 - f' f''')^2$$

$$\|\bar{r}'\|^2 = f'^2 + f''^2 + f'''^2$$

$$k = \frac{\left[(f'''^2 - f'' f^{(iv)})^2 + (f'' f''' - f' f^{(iv)})^2 + (f''^2 - f' f''')^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{(f'^2 + f''^2 + f'''^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = f^{(v)} (f' f''' - f''^2) + f^{(iv)} (f'' f''' - f' f^{(iv)}) + f''' (f'' f^{(iv)} - f'''^2)$$

$$\tau = \frac{f^{(v)} (f' f''' - f''^2) + f^{(iv)} (f'' f''' - f' f^{(iv)}) + f''' (f'' f^{(iv)} - f'''^2)}{(f'''^2 - f'' f^{(iv)})^2 + (f'' f''' - f' f^{(iv)})^2 + (f''^2 - f' f''')^2}.$$

Exemple:

(i) $\bar{r}(t) = (-\cos t, -\sin t, \cos t)$

(ii) $\bar{r}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)$

Nodurile olonome au fost introduse ca extensie în sensul 2-jeturilor a funcției periodice f în lucrarea:

Vassiliev, V. A., *Holonomic Links and Smale Principles for Multisingularities*, J. Knot Theory and Its Ramifications, 6(1997), no. 1, 115-123.

B) Din relația dată rezultă:

$$\begin{aligned} f''' &= (a^2 + b) f' + abf \\ f^{(iv)} &= (a^3 + 2ab) f' + (a^2b + b^2) f \\ f^{(v)} &= (a^4 + 3a^2b + b^2) f' + (a^3b + 2ab^2) f \end{aligned}$$

și deci:

$$\begin{aligned} &(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \\ &= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -(a^2 + b)f' - abf \\ -af' - bf & (a^2 + b)f' + abf & -f^{(iv)} \\ -(a^2 + b)f' - abf & (a^3 + 2ab)f' + (a^2b + b^2)f & -f^{(v)} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

(prin înmulțirea primei linii cu $(-a)$ și adunarea la a doua, respectiv înmulțirea primei linii cu $(-a^2 - b)$ și adunarea la a treia)

$$= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -(a^2 + b)f' - abf \\ -bf & bf' & -abf' - b^2f \\ -abf & abf' & -a^2bf' - ab^2f \end{vmatrix} = 0$$

deoarece ultima linie este egală cu a doua înmulțită cu a . Astfel se explică faptul că pentru cele două exemple de mai sus, în care avem $b = -1$ și $a = 0$, torsiunea este nulă!

Mai general, dacă $f'' = af' + bf + c$, atunci se obține cu Maple:

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = -c [-2ab^2f'^2 + 2a^2b^2ff' + 2ab^3f^2 + cf'(a^4 + b^2 + 3a^2b) + abcf(a^2 + 2b)]$$

ceea ce dă prin particularizarea $c = 0$ cazul precedent.

6.31 (i) Fie $m(s_0)$ centrul sferei osculatoare. Notând:

$$m(s_0) = c(s_0) + \alpha \bar{t}(s_0) + \beta \bar{n}(s_0) + \gamma \bar{b}(s_0)$$

vom determina α, β, γ . Astfel, derivăm funcția $d(s) = \langle m - \bar{r}(s), m - \bar{r}(s) \rangle$:

$$\begin{cases} d' = -2 \langle m - \bar{r}(s), \bar{r}'(s) \rangle \\ d'' = -2 \langle m - \bar{r}(s), \bar{r}''(s) \rangle + 2 \langle \bar{r}'(s), \bar{r}'(s) \rangle \\ d''' = -2 \langle m - \bar{r}(s), \bar{r}'''(s) \rangle \end{cases}$$

Contact optim va fi când vom avea cât mai multe derivate nule în s_0 . Avem:

$$d'(s_0) = 0 \Leftrightarrow \langle m - \bar{r}(s_0), \bar{t}(s_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$d''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \langle m - \bar{r}(s_0), \bar{r}''(s_0) \rangle = -1 = 0 \Leftrightarrow \beta k = 1$$

$$\begin{aligned} d'''(s_0) = 0 &\Leftrightarrow \langle m - \bar{r}(s_0), \bar{r}'''(s_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle m - \bar{r}(s_0), k'\bar{n} - k^2\bar{t} + k\tau\bar{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{k'}{k} + k\tau\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}. \end{aligned}$$

(ii) Impunem condiția ca funcția $m(s)$ definită la punctul anterior să fie constantă. Deci:

$$\left(\bar{r} + \frac{1}{k}\bar{n} - \frac{k'}{k^2\tau}\bar{b} \right)' = \left[\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau} \right)' \right] \bar{b} = \bar{0}$$

ceea ce dă concluzia.

(iii) Din ipoteză rezultă că vectorii $\bar{r}, \bar{r}', \bar{r} \times \bar{r}'$ constituie o bază ortonormată. Avem:

$$\bar{r}'' = \langle \bar{r}'', \bar{r} \rangle \bar{r} + \langle \bar{r}'', \bar{r}' \rangle \bar{r}' + \langle \bar{r}'', \bar{r} \times \bar{r}' \rangle \bar{r} \times \bar{r}'.$$

Deoarece: $\langle \bar{r}'', \bar{r} \rangle = -\langle \bar{r}, \bar{r} \rangle = -1$ rezulta: $\bar{r}'' = -\bar{r} + J\bar{r} \times \bar{r}'$ și deci:

$$k^2 = \langle \bar{r}'', \bar{r}'' \rangle = 1 + J^2.$$

De asemeni: $\bar{n} = \frac{1}{k}\bar{r}'', \bar{b} = \bar{r}' \times \bar{n}$ și $\langle \bar{r}''', \bar{r} \rangle = 0$ implică:

$$\begin{aligned} \tau = -\langle \bar{b}', \bar{n} \rangle &= -\left\langle \left(\frac{1}{k}\bar{r}' \times \bar{r}'' \right)', \frac{1}{k}\bar{r}'' \right\rangle = -\frac{1}{k^2} \langle \bar{r}' \times \bar{r}'', \bar{r}'' \rangle + \frac{k'}{k^3} \langle \bar{r}' \times \bar{r}'', \bar{r}'' \rangle = \\ &= -\frac{1}{k^2} \langle \bar{r}' \times \bar{r}''', -\bar{r} + J\bar{r} \times \bar{r}' \rangle = \frac{J'}{k^2}. \end{aligned}$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că \bar{r}''' este perpendicular pe \bar{r} și în consecință $\bar{r}' \times \bar{r}'''$ este perpendicular pe $\bar{r}' \times \bar{r}$.

Rezolvarea acestui exercițiu urmărește teorema 2.10, p. 20-22 din:

Kuhnel, W., *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library, vol. 16, A.M.S., 2002.

CAPITOLUL 7

Suprafețe: Probleme

7.1 Enunțuri

7.1 Pentru suprafața $S : x = u^2 + u + v, y = v^2 + u - v, z = u - v$ curbele de coordonate ($u = \text{constant}$ respectiv $v = \text{constant}$) sunt curbe plane.

7.2 Să se arate că intersecția suprafețelor $S_1 : x + y + z = 0$, $S_2 : x^2 + xy + y^2 = 2$ se află pe sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7.3 Se cere planul tangent și normala la suprafața $S : z(x^2 + y^2) = 1$ în punctul $M(1, 1, \frac{1}{2})$.

7.4 Se cere planul tangent și normala la suprafața $S : x = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, y = \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2}, z = \frac{uv - 1}{u^2 + v^2}$ în punctul $M(u = 1, v = 1)$.

7.5 Se consideră curba C de intersecție a suprafețelor $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (sferă centrată în origine), $S_2 : 2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ (con centrat în origine). Se cere ecuația dreptei tangente în $M(1, 1, 1)$ la C .

7.6 Pentru suprafața $S : x = u + v, y = u - v, z = uv$ se cer:

(i) coordonatele carteziene ale punctelor $M_1(u = 2, v = 1), M_2(u = 1, v = 2)$

(ii) să se stabilească dacă punctele $M_3(4, 2, 3), M_4(1, 4, -2)$ aparțin lui

S

(iii) ecuația implicită.

7.7 Pentru suprafața $S : x = u^2 + v, y = u^2 - v, z = uv$ să se arate că:

(i) curbele $u = u_0 \neq 0$ sunt drepte iar curbele $v = v_0$ sunt curbe plane

(ii) curba $u = v$ este curbă plană.

7.8 Se cere suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu dreapta d și având curba directoare C unde:

(i) $d : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (cerc)

- (ii) $d : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}, C : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$
 (iii) d are vectorul director(direcția) $\bar{a} = (2, 3, 4)$,
 $C : \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

7.9 Se cere suprafața conică având vârful V și curba directoare C unde:

- (i) $V(0, 0, 0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$
 (ii) $V(0, 0, 0), C : \begin{cases} y^2 = x \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$
 (iii) $V(1, 1, 1), C : \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = xy \\ z = 0 \end{cases}$
 (iv) $V(0, -a, 0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

7.10 Se cere suprafața conoidă:

- (i) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba $C = \text{axa } Oz$ și dreapta $d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$
 (ii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba $C = \text{hiperbola } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ și dreapta $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
 (iii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = yOz$, ce se sprijină pe curba $C : \begin{cases} z^2 = 2x \\ 9y^2 = 16xz \end{cases}$ și dreapta $d = \text{axa } Ox$.

7.11 Fie S o suprafață de rotație având axa Oz ca axă de rotație. Să se arate că ecuațiile lui S sunt: $\begin{cases} x = \varphi(u) \cos v \\ y = \varphi(u) \sin v \\ z = \psi(u) \end{cases}$ alegând curba meridian în

planul xOz astfel $C : \begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$.

Se cere studiul următoarelor suprafețe după algoritmul:

- primele două forme fundamentale,
- curbura medie și curbura totală,
- linii remarcabile: asimptotice, de curbură, geodezice.

7.12 Planul determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorii necoliniari $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

7.13 O suprafață de rotație cu axa de rotație Oz folosind parametrizarea din problema 2.11. Cazuri particulare:

- (i) cilindrul circular drept cu R raza bazei,

(ii) curba meridian este parametrizată canonic.

Pentru cazul (ii) să se studieze când:

(iii) curbura medie și curbura totală sunt constante?

7.14 Sfera de rază R centrată în origine.

2.15 (Suprafața Enneper) $S : \begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3(u^2 - v^2) \end{cases}$

7.16 (Elicoidul) $S : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = hv \end{cases}$ cu $h > 0$ o constantă reală.

7.17 O suprafață explicită $S : z = f(x, y)$ folosind notațiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

7.18 (Paraboloidul hiperbolic) $S : z = xy$.

7.19 (Pseudosfera) $S : \begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \end{cases}$ pentru $\operatorname{tg} \frac{u}{2} > 0$.

7.20 (Torul) $T_{R,r} : \begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$ cu $0 < r < R$. Torul $T_{R,r}$

se obține prin rotirea cercului de centru $(R, 0, 0)$ și rază r din planul xOz în jurul axei Oz .

7.21 (Banda lui Möbius) $S : \begin{cases} x = \cos u \left(1 + v \sin \frac{u}{2} \right) \\ y = \sin u \left(1 + v \sin \frac{u}{2} \right) \\ z = v \cos \frac{u}{2} \end{cases}$.

7.22 $S : \begin{cases} x = a(\cos u - v \sin u) \\ y = a(\sin u + v \cos u) \\ z = b(u + v) \end{cases}$ cu $a, b > 0$.

7.23 $S : \begin{cases} x = v \sin \varphi \cos u \\ y = v \sin \varphi \sin u \\ z = v \cos \varphi \end{cases}$ cu $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7.24 (Unghiul dintre 2 curbe pe o suprafață) Fie pe suprafața S două curbe având tangentele $d\bar{r} = r_u du + r_v dv$, $\delta\bar{r} = r_u \delta u + r_v \delta v$ într-un punct în care se intersectează. Definim unghiul φ dintre cele 2 curbe în punctul comun prin:

$$\cos \varphi = \frac{\langle d\bar{r}, \delta\bar{r} \rangle}{\|d\bar{r}\| \|\delta\bar{r}\|}.$$

Să se arate că:

$$\cos \varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u\delta v) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

7.25 Pe paraboloidul $S : x^2 + y^2 = 2\rho z$ se dau curbele $C_1 : x = y, C_2 : z = a$. Se cere unghiul dintre cele două curbe, cu a, ρ constante nenule.

7.26 Pe suprafața $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u(1+v) \end{cases}$ se cere unghiul dintre curbele

coordonate și unghiurile dintre curba $C : u + v = 0$ și curbele coordonate.

7.27 (i) Folosind ecuațiile parametrice de la problema 2.11 să se obțină următoarea formulă pentru curbura totală a suprafețelor de rotație cu axa Oz ca axă de rotație:

$$K = \frac{\psi'(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')}{\varphi\left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right)^2}$$

(ii) Folosind formula precedentă se cer suprafețele de rotație având curbura totală constantă negativă.

7.28 Se cere locul geometric al punctelor parabolice ale suprafeței $S : \begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$.

7.29 Să se arate că toate punctele suprafeței $S : x + y = z^3$ sunt parabolice.

7.30 Să se arate că toate punctele suprafeței $S : \begin{cases} x = shu \\ y = chu \cos v \\ z = chu \sin v \end{cases}$ sunt hiperbolice.

7.31 (*Suprafețe Țițeica*) O suprafață S se numește *suprafață Țițeica* dacă:

a) curbura totală K este nenulă pe S

b) $\frac{K}{d^4}$ este o constantă unde d este distanța de la origine la planul tangent în punctul curent al lui S .

Să se arate:

(i) sfera este suprafață Țițeica.

(ii) $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{uv} \end{cases}$ este suprafață Țițeica.

(iii) Pentru o suprafață Țițeica având curbura totală negativă liniile asimptotice sunt curbe Țițeica.

7.32 (*Expresii ale curburii totale*) (i) Fie o suprafață în *coordonate semi-geodezice* (sau *coordonate polare geodezice*) adică forma I-a fundamentală are expresia $ds^2 = g = dr^2 + G(r, \varphi) d\varphi^2$. Să se arate că $K = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. Să se studieze cazul $K = -1$.

(ii) Mai general, să se arate că pentru o parametrizare ortogonală i.e. $F = 0$, avem:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right]$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(iii) (*Rețele Cebîșev*) O parametrizare a unei suprafețe pentru care $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = \cos \varphi$ se numește *rețea Cebîșev*. Să se arate că:

$$K = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}.$$

7.33 Fie o suprafață de rotație de ecuație $S : x^2 + y^2 = f^2(z)$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = u \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală

este $g = (1 + f'^2(u)) du^2 + f^2(u) dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{f''(u)}{f(u)(1+f'^2(u))^2}$. Să se studieze cazul $K = -1$. Să se calculeze K în cazul sferei de rază R când $f(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$.

7.34 Fie o suprafață de rotație de ecuație $S : z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = f(u) \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală este

$g = (1 + f'^2(u)) du^2 + u^2 dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{1}{u\sqrt{1+f'^2(u)}} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}} \right) = -\frac{\varphi'(u)}{2u}$ cu notația $\varphi(u) = \frac{1}{1+f'^2(u)}$. Să se studieze cazurile $K = -1$ și $K = 0$.

7.35 Fie S un domeniu în \mathbb{R}^2 considerat ca suprafață și pentru care forma I-a fundamentală este conformă cu metrica lui \mathbb{R}^2 adică $g_{ij} = E\delta_{ij} = e^{2v}\delta_{ij}$. Presupunând $E = E(r), v = v(r)$ să se arate că:

$$K = -\frac{1}{2E^2} \left(E''(r) + \frac{1}{r} E'(r) \right)^2 = -\left(v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) \right) e^{-2v}.$$

- (i) Să se studieze cazul $K = -1$.
- (ii) Se cere K pentru $g_{ij} = \frac{4}{(1-r^2)^2} \delta_{ij}$.

7.36 Pentru suprafața $S : z = f(x, y)$ și punctul $p = (x, y, f(x, y))$ să se arate că:

$$K(p) = (1 + \|\nabla f(x, y)\|^2)^{-2} \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x, y).$$

7.37 Să se arate că simbolii Christoffel pentru suprafața $S : \bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ sunt dați de relația:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Se dă suprafața S în coordonatele semigeodezice, conform exercițiului 2.32(i). Se cer simbolii Christoffel.

(ii) Să se aplice calculul precent la elicoid.

(iii) Se cer simbolii Christoffel pentru o rețea Cebîșev, conform exercițiului 2.32(iii).

7.39 (*Aplicații conforme*) Fie un domeniu simplu conex $W \subset \mathbb{C}$. Aplicația $X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *conformă* dacă:

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial X}{\partial y} \right\|^2 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \right\rangle = 0.$$

Să se studieze proprietățile suprafeței $S = X(W)$.

7.40 (*Reprezentarea Weierstrass a suprafețelor minimale*) Folosind exercițiul anterior să se definească suprafețele minimale ca imagini de aplicații conforme speciale și să se deducă reprezentarea Weierstrass. Să se deducă o interpretare a aplicației Gauss.

7.41 (*Geometria reprezentării Weierstrass*) Pentru o suprafață minimală să se exprime elementele geometrice în funcție de datele reprezentării Weierstrass.

7.42 (*Exemple de suprafețe minimale*) (i) Precizând convenabil datele reprezentării Weierstrass să se obțină exemple de suprafețe minimale.

(ii) Să se scrie diferite forme ale ecuației suprafețelor minimale.

7.43 (*Curbura Gauss a hipersuprafețelor*) Să se definească curbura Gauss a hipersuprafețelor și pentru hipersuprafețe definite implicit să se dea o formulă de calcul.

7.44 (*Ecuații Gauss-Codazzi*) (i) Să se scrie ecuațiile Gauss-Codazzi pentru suprafețe conforme.

(ii) Să se aplice la suprafețe minimale.

7.45 Ca aplicație a ecuației Gauss să se arate că nu există o suprafață S cu:

(i) forma I-a fundamentală $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și forma a II-a fundamentală

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 + (u^1)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^1 \end{pmatrix}$.

7.46 (Formulele Gauss-Weingarten) Fie suprafața $S : \bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$. Să se arate că au loc:

$$\begin{cases} \bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + b_{ij} \bar{N} & (\text{formulele Gauss}) \\ \bar{N}_i = -b_i^k \bar{r}_k & (\text{formulele Weingarten}) \end{cases}.$$

7.47 (Geodezice) O curbă pe suprafața S se numește *geodezică* dacă vectorul accelerație este normal la S . Folosind formula Gauss se cere ecuația geodezicelor.

7.2 Soluții

7.1 Notăm \bar{r}_{u_0} respectiv \bar{r}_{v_0} curba de coordonată $u = u_0 = \text{const.}$ respectiv $v = v_0 = \text{const.}$ Avem $\bar{r}_{u_0} = (u_0^2 + u_0 + v, v^2 + u_0 - v, u_0 v)$ de unde rezultă $\bar{r}_{u_0}''' = \bar{0}$ și deci torsiunea curbei \bar{r}_{u_0} este nulă adică această curbă este plană. Analog $\bar{r}_{v_0}''' = \bar{0}$.

7.2 Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Rezultă, ținând cont de S_1 , $F(x, y, -x - y) = 2(x^2 + y^2 + xy - 2)$ de unde rezultă că restricția lui $F(x, y, -x - y)$ pe S_2 este nulă, ceea ce voiam.

7.3 Se observă mai întâi că $M \in S$. Notând $F(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - 1$ avem $\nabla F = (2xz, 2yz, x^2 + y^2)$ deci $\nabla F(M) = \bar{N}(M) = (1, 1, 2)$ de unde rezultă $T_M S : x + y + z - 3 = 0$ și normala ca dreaptă: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

7.4 Coordonatele carteziene ale lui M sunt $(0, 1, 0)$. Avem

$$\begin{cases} \bar{r}_u = \left(\frac{4uv^2}{(u^2+v^2)^2}, \frac{u(u^3+3uv^2-2v^3)}{(u^2+v^2)^2}, \frac{-u^2v+2u+v^3}{(u^2+v^2)^2} \right) \\ \bar{r}_v = \left(\frac{-4u^2v}{(u^2+v^2)^2}, \frac{v(v^3+3vu^2-u^3)}{(u^2+v^2)^2}, \frac{-v^2u+2v+u^3}{(u^2+v^2)^2} \right) \end{cases} \quad \text{de unde rezultă}$$

$$\begin{cases} \bar{r}_u(M) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \bar{r}_v(M) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \text{și deci } T_M S : \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \text{ în final}$$

$T_MS : -y + z + 1 = 0$ (deci Ox este paralelă cu T_MS !). Normala ca dreaptă este: $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$.

7.5 Se observă mai întâi că $M \in C = S_1 \cap S_2$. Prin urmare, tangenta căutată este $T_MC = T_MS_1 \cap T_MS_2$. Notând $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, $F_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ avem $\nabla F_1 = 2(x, y, z)$, $\nabla F_2 = 2(2x, y, -3z)$ și deci (până la factorul de proporționalitate) $\nabla F_1(M) = (1, 1, 1)$, $\nabla F_2(M) = (2, 1, -3)$. Obținem $T_MS_1 : x + y + z - 3 = 0$, $T_MS_2 : 2x + y - 3z = 0$ și tangenta cerută apare ca intersecția a două plane $T_MC : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$. Altfel: vectorul director al dreptei tangente este $\nabla F_1(M) \times \nabla F_2(M) = (-4, 5, -1)$ de unde $T_MC : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

7.6 (i) $M_1(3, 2, 1)$, $M_2(3, -1, 2)$ (ii) $M_3 \in S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 2 \\ uv = 3 \end{cases}$

are soluția $u = 3, v = 1$, $M_4 \notin S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u + v = 1 \\ u - v = 4 \\ uv = -2 \end{cases}$ este incom-

patibil. (iii) Din $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$ și deci $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$.

Deci $S : x^2 - y^2 - 4z = 0$.

7.7 (i) $\bar{r}^{u_0}(v) = (u_0^2 + v, u_0^2 - v, u_0 v)$ și eliminând v obținem $(v) = \frac{x-u_0^2}{1} = \frac{y-u_0^2}{-1} = \frac{z}{u_0}$ care este o dreaptă ce trece prin punctul $M(u_0^2, u_0^2, 0)$ și are vectorul director $\bar{a} = (1, -1, u_0) \neq \bar{0}$.

Avem $\bar{r}^{v_0}(u) = (u^2 + v_0, u^2 - v_0, uv_0)$ de unde $\frac{d^3}{du^3} \bar{r}^{v_0} = \bar{0}$ ceea ce dă concluzia.

(ii) $\bar{r}^{u=v}(u) = (u^2 + u, u^2 - u, u^2)$ de unde $\frac{d^3}{du^3} \bar{r}^{u=v} = \bar{0}$ ceea ce voiam.

7.8 Numim *suprafață cilindrică* o suprafață generată de o dreaptă G ce se deplasează în spațiu paralel cu o direcție fixă și sprijinindu-se pe o curbă fixă C . Dreapta G se numește *generatoare* iar C se numește *curba directoare*.

(i) Generatoarele fiind paralele cu d au ecuația $G : \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + 2y + 3z = \beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Punem condiția ca G să se sprijine pe C adică sistemul format din

ecuațiile lui G și C să fie compatibil $\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + 2y + 3z = \beta \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$. Din primele

3 relații avem $\begin{cases} x = \frac{3\alpha - \beta}{2} \\ z = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{cases}$ care înlocuite în ultima relație dau *condiția de*

compatibilitate: $(\beta - \alpha)^2 + (3\alpha - \beta)^2 = 8$ și înlocuind α, β din ecuațiile lui G în condiția de compatibilitate rezultă ecuația lui $S : (2z + y)^2 + (2x + y)^2 = 8$.

(ii) Scriem $d : \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ de unde $G : \begin{cases} x - 3z = \alpha \\ y - 2z = \beta \end{cases}$. Din sis-

temul $G \cap C$ obținem $\begin{cases} x = 3 + \frac{\alpha}{4} \\ y = \beta + 2 - \frac{\alpha}{2} \\ z = 1 - \frac{\alpha}{4} \end{cases}$ ce dă condiția de compatibilitate:
 $2\left(3 + \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \left(\beta + 2 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^2$ și suprafața $S : (x - 3z + 12)^2 + 2(-x + 2y - z + 4)^2 = 4(-x + 3z + 4)^2$.

(iii) d are direcția $\bar{a} = (2, 3, 4)$ deci $G : \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z-z_0}{4}$ sau

$G : \begin{cases} 3x - 2y = \alpha \\ 2x - z = \beta \end{cases}$. Din sistemul $G \cap C$ obținem $\begin{cases} x = \alpha - 2\beta - 4 \\ y = \alpha - 3\beta - 6 \\ z = 2\alpha - 5\beta - 8 \end{cases}$ și

condiția de compatibilitate: $(\alpha - 2\beta - 5)^2 + (\alpha - 3\beta - 3)^2 + (2\alpha - 5\beta - 10)^2 = 25$ ceea ce dă suprafața $S : (-x - 2y + 2z - 5)^2 + (-3x - 2y + 3z - 3)^2 + (-4x - 4y + 5z - 10)^2 = 25$.

7.9 Numim *suprafață conică* o suprafață generată de o dreaptă G ce trece printr-un punct fix V și se sprijină pe o curbă fixă C . Denumiri: G -generatoare, V -vârf, C -curba directoare.

(i) Generatoarele trecând prin V au ecuația $G : \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y-0}{\beta} = \frac{z-0}{1}$ adică

$G : \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \beta z \end{cases}$. Din sistemul $G \cap C$ obținem condiția de compatibilitate $3\alpha^2 - 5\beta^2 - 1$ și suprafața $S : 3x^2 - 5y^2 - z^2 = 0$.

(ii) Generatoarele au aceeași ecuație cu cea de la punctul precedent. Condiția de compatibilitate $4\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha - \beta^2 = 0$ dă suprafața $S : 4x^2 + 3xy + 3xz - y^2 = 0$.

(iii) Generatoarele $G : \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-1}{\beta} = \frac{z-1}{1}$ sau încă $G : \begin{cases} x = \alpha(z-1) + 1 \\ y = \beta(z-1) + 1 \end{cases}$

dau relația de compatibilitate $\left[(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2\right]^2 = (1-\alpha)(1-\beta)$ de unde rezultă suprafața $S : \left[(z-x)^2 + (z-y)^2\right]^2 = (z-x)(z-y)(z-1)^2$.

(iv) Generatoarele $G : \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y+a}{\beta} = \frac{z-0}{1}$ sau încă $G : \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \beta z - a \end{cases}$ dau

relația de compatibilitate $(a+2)^2(\alpha^2+1) + (2\beta-a)^2 = 4(\beta+1)^2$ de unde rezultă suprafața $S : (a+2)^2(x^2+z^2) + (2y+2a-az)^2 = 4(y+z+a)^2$.

7.10 Numim *suprafață conoidă cu plan director* o suprafață generată de

o dreaptă G ce se deplasează în spațiu, paralel cu un plan π și sprijinindu-se pe o dreaptă fixă d și o curbă fixă C . Denumiri: G -generatoare, π -plan director.

(i) Generatoarea G se gândește ca fiind intersecția a doua plane: unul paralel cu π (deci de ecuație $\pi_1 : z = \alpha$) și altul din fascicolul de plane ce conține $Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, deci al doilea plan are ecuația $\pi_2 : x + \beta y = 0$. Din $G \cap d$ obținem relația de compatibilitate $\alpha\beta - 2\alpha - 3\beta = 0$ și suprafața $S : z(x + 2y) - 3x = 0$.

(ii) Generatoarea G este intersecția a două plane, unul paralel cu π (deci are ecuația $\pi_1 : z = \alpha$) și al doilea din fascicolul de plane ce conține pe d , deci $\pi_2 : y + \beta(x - 2) = 0$. Din $G \cap C$ obținem condiția de compatibilitate $9(\beta - 1)^2 - \alpha^2\beta^2 = 9\beta^2$ și suprafața $S : 9(x + y - 2)^2 - y^2z^2 = 9y^2$.

(iii) Generatoarea G este intersecția a două plane, unul paralel cu π , deci $\pi_1 : x = \alpha$, și altul din fascicolul de plane ce conține pe d , $\pi_2 : y + \beta z = 0$. Din $G \cap C$ obținem condiția de compatibilitate $81\beta^4 = 128\alpha$ și suprafața $S : 81y^4 - 128xz^2 = 0$.

7.11 Numim *suprafață de rotație* o suprafață generată de rotirea, fără alunecare a unei curbe C în jurul unei axe fixe d . Curba C se numește *curba meridian* iar d o numim *axa de rotație*. În această rotație orice punct al lui C descrie un cerc, numit *cerc paralel*, cu centrul pe d .

Presupunând curba meridian C în planul xOz rezultă ecuația lui $C : \begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$ și efectuând rotația de unghi v în jurul lui Oz obținem ecuațiile cerute.

7.12 Avem $\pi : \bar{r}(u, v) = \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$, unde $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, de unde rezultă:

$$\bar{r}_u = \bar{a}, \bar{r}_v = \bar{b}, \bar{N} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}, \bar{r}_{uu} = \bar{r}_{uv} = \bar{r}_{vv} = \bar{0}$$

și deci: $E = \|\bar{a}\|^2, F = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle, G = \|\bar{b}\|^2, L = M = N = 0$. Putem alege vectorii \bar{a}, \bar{b} ca formând o bază ortonormată în π (conform procedurii Gram-Schmidt) și deci: $E = G = 1, F = 0, H = K = 0$. Toate punctele sunt planare.

7.13

$$\begin{array}{cccc}
\bar{r} & x & y & z \\
\bar{r}_u & \varphi' \cos v & \varphi' \sin v & \psi' \\
\bar{r}_v & -\varphi \sin v & \varphi \cos v & 0 \\
\bar{r}_{uu} & \varphi'' \cos v & \varphi'' \sin v & \psi'' \\
\bar{r}_{uv} & -\varphi' \sin v & \varphi' \cos v & 0 \\
\bar{r}_{vv} & -\varphi \cos v & -\varphi \sin v & 0 \\
\bar{N} & \frac{-\psi' \cos v}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} & \frac{-\psi' \sin v}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} & \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}
\end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \varphi'^2 + \psi'^2, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2 (\varphi'^2 + \psi'^2) \\ L = \frac{\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, M = 0, N = \frac{\varphi \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \end{array} \right.$$

$$H = \frac{\psi' (\varphi'^2 + \psi'^2) - \varphi (\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi')}{2\varphi (\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{\psi' (\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi')}{\varphi (\varphi'^2 + \psi'^2)^2}.$$

Cazuri particulare:

(i) Cilindrul circular drept

Luăm $\varphi(u) = 1, \psi(u) = Ru$ și obținem:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = R^2, F = 0, G = 1, EG - F^2 = R^2 \\ L = M = 0, N = 1 \end{array} \right.$$

$$H = \frac{1}{2}, K = 0.$$

(ii) Presupunem curba meridian parametrizată canonic, deci:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1. \quad (*)$$

Avem:

$$\begin{aligned}
E &= 1, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2 \\
L &= \varphi' \psi'' - \varphi'' \psi', M = 0, N = \varphi \psi' \\
H &= \frac{\psi' - \varphi (\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi')}{2\varphi}, K = \frac{\psi' (\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi')}{\varphi}.
\end{aligned}$$

Derivând relația (*) obținem $\varphi' \varphi'' + \psi' \psi'' = 0$ de unde:

$$\varphi'' = -\frac{\psi' \psi''}{\varphi'}, \psi'' = -\frac{\varphi' \varphi''}{\psi'}.$$

Înlocuind φ'' în expresia precenta a lui H și ψ'' în expresia precedentă a lui K obținem:

$$H = \frac{\varphi'\psi' + \varphi\psi''}{2\varphi\varphi'} = \frac{(\varphi\psi')'}{(\varphi^2)'}, K = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

(iii) Deci pentru o suprafață de rotație având curbura medie constantă $H = H_0$ avem ecuația diferențială: $(\varphi\psi')' = H_0(\varphi^2)'$ care se integrează: $\varphi\psi' = H_0\varphi^2 + C$ cu C constantă reală. Alegând $C = 0$ și simplificând prin φ avem $\psi' = H_0\varphi$.

Analog pentru o suprafață de rotație având curbura totală constantă $K = K_0$ avem ecuația diferențială de ordinul doi: $\varphi'' + K_0\varphi = 0$ cu următoarea soluție generală depinzând de constatele reale a, b :

$$\varphi(u) = \begin{cases} a \cos(\sqrt{K_0}u) + b \sin(\sqrt{K_0}u), & pt. K_0 > 0 \\ au + b, |a| \leq 1, & pt. K_0 = 0 \\ ach(\sqrt{-K_0}u) + bsh(\sqrt{-K_0}u), & pt. K_0 < 0 \end{cases}.$$

Exemplu: $K_0 = 0$. Avem:

-cilindru circular de rază $R = b$ dacă $a = 0$

-plan ortogonal pe axa de rotație dacă $|a| = 1$

-con circular dacă $0 < |a| < 1$.

7.14 Aplicăm formulele obținute la exercițiul anterior cu: $\varphi(u) = R \cos u, \psi(u) = R \sin u$.

$$\begin{cases} E = R^2, F = 0, G = R^2 \cos^2 u, EG - F^2 = R^4 \cos^2 u \\ L = R, M = 0, N = R \cos^2 u \end{cases}.$$

$$H = \frac{1}{R}, K = \frac{1}{R^2}.$$

Toate punctele sunt ombilicale și eliptice. Pe sferă nu avem linii asimptotice și orice curbă este linie de curbură.

7.15

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$3(1 + v^2 - u^2)$	$6uv$	$6u$
\bar{r}_v	$6uv$	$3(1 + u^2 - v^2)$	$-6v$
\bar{r}_{uu}	$-6u$	$6v$	6
\bar{r}_{uv}	$6v$	$6u$	0
\bar{r}_{vv}	$6u$	$-6v$	-6
\bar{N}	$\frac{-2u}{1+u^2+v^2}$	$\frac{2v}{1+u^2+v^2}$	$\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$

$$\begin{cases} E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2, F = 0, EG - F^2 = 81(1 + u^2 + v^2)^4 \\ L = 6, M = 0, N = -6 \end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-4}{9(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Deci suprafața Enneper este suprafață minimală cu toate punctele hiperbolice. Liniile asimptotice sunt: $\begin{cases} u + v = \text{const.} \\ u - v = \text{const.} \end{cases}$ iar liniile de curbură sunt

liniile parametrice: $\begin{cases} u = \text{const.} \\ v = \text{const.} \end{cases}$.

Fig.6 Suprafața Enneper.

7.16

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$\cos v$	$\sin v$	0
\bar{r}_v	$-u \sin v$	$u \cos v$	h
\bar{r}_{uu}	0	0	0
\bar{r}_{uv}	$-\sin v$	$\cos v$	0
\bar{r}_{vv}	$-u \cos v$	$-u \sin v$	0
\bar{N}	$\frac{h \sin v}{\sqrt{u^2 + h^2}}$	$\frac{-h \cos v}{\sqrt{u^2 + h^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^2 + h^2}}$

$$\begin{cases} E = 1, F = 0, G = u^2 + h^2, EG - F^2 = u^2 + h^2 \\ L = 0, M = -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}}, N = 0 \end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-h^2}{(h^2 + u^2)^2}$$

de unde rezultă că elicoidul este suprafață minimală cu toate punctele hiperbolice.

Liniile asimptotice sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = \text{const.} \\ v = \text{const.} \end{cases}$ iar liniile de

curbură: $v = \pm \int_{u_0}^u \frac{dt}{\sqrt{h^2+t^2}}$.

7.17

$$\begin{array}{cccc} \bar{r} & x & y & z \\ \bar{r}_u & 1 & 0 & p \\ \bar{r}_v & 0 & 1 & q \\ \bar{r}_{uu} & 0 & 0 & r \\ \bar{r}_{uv} & 0 & 0 & s \\ \bar{r}_{vv} & 0 & 0 & t \\ \bar{N} & \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} & \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2, EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 \\ L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{array} \right.$$

$$H = \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

7.18 Aplicăm exercițiul precedent:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = y, q = x, r = t = 0, s = 1 \\ E = 1 + y^2, F = xy, G = 1 + x^2 \\ L = N = 0, M = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{array} \right.$$

$$H = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice. Linie asimptotică este doar: $v = \text{const.}$

iar linii de curbură sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = \text{const.} \\ v = \text{const.} \end{cases}$.

7.19

$$\begin{array}{cccc} \bar{r} & x & y & z \\ \bar{r}_u & R \cos u \cos v & R \cos u \sin v & R \frac{\cos^2 u}{\sin u} \\ \bar{r}_v & -R \sin u \sin v & R \sin u \cos v & 0 \\ \bar{r}_{uu} & -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & -R \cos u \frac{1+\sin^2 u}{\sin^2 u} \\ \bar{r}_{uv} & -R \cos u \sin v & R \cos u \cos v & 0 \\ \bar{r}_{vv} & -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & 0 \\ \bar{N} & -\cos u \cos v & -\cos u \sin v & \sin u \end{array}$$

$$\begin{cases} E = R^2 \operatorname{ctg}^2 u, F = 0, G = R^2 \sin^2 u, EG - F^2 = R^4 \cos^2 u \\ L = -R \operatorname{ctg} u, M = 0, N = R \sin u \cos u \end{cases}.$$

$$H = \frac{\operatorname{ctg} 2u}{R}, K = -\frac{1}{R^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice.

7.20

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$-r \sin u \cos v$	$-r \sin u \sin v$	$r \cos u$
\bar{r}_v	$-(R + r \cos u) \sin v$	$(R + r \cos u) \cos v$	0
\bar{r}_{uu}	$-r \cos u \cos v$	$-r \cos u \sin v$	$-r \sin u$
\bar{r}_{uv}	$r \sin u \sin v$	$-r \sin u \cos v$	0
\bar{r}_{vv}	$-(R + r \cos u) \cos v$	$-(R + r \cos u) \sin v$	0
\bar{N}	$-\cos u \cos v$	$-\cos u \sin v$	$-\sin u$

$$\begin{cases} E = r^2, F = 0, G = (R + r \cos u)^2, EG - F^2 = r^2 (R + r \cos u)^2 \\ L = r, M = 0, N = \cos u (R + r \cos u) \end{cases}.$$

$$H = \frac{R + 2r \cos u}{2r (R + r \cos u)}, K = \frac{\cos u}{r (R + r \cos u)}$$

de unde rezultă: curba $u = \pm \frac{\pi}{2}$ are toate punctele parabolice, $\{(u, v) \mid \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}\}$ are toate punctele hiperbolice, $\{(u, v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\}$ are toate punctele eliptice.

7.21

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$-\sin u \left(1 + v \sin \frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2} \cos u \cos \frac{u}{2}$	$\cos u \left(1 + v \sin \frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2} \sin u \cos \frac{u}{2}$	$-\frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}$
\bar{r}_v	$\cos u \sin \frac{u}{2}$	$\sin u \sin \frac{u}{2}$	$\cos \frac{u}{2}$

$$E = \left(1 + v \sin \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}, F = 0, G = 1.$$

7.22

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$-a (\sin u + v \cos u)$	$a (\cos u - v \sin u)$	b
\bar{r}_v	$-a \sin u$	$a \cos u$	b
\bar{r}_{uu}	$a (-\cos u + v \sin u)$	$-a (\sin u + v \cos u)$	0
\bar{r}_{uv}	$-a \cos u$	$-a \sin u$	0
\bar{r}_{vv}	0	0	0
\bar{N}	$\frac{-b \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$\frac{b \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\begin{cases} E = a^2(1+v^2) + b^2, F = a^2 + b^2 = G, EG - F^2 = a^2v^2(a^2 + b^2) \\ L = \frac{-abv}{\sqrt{a^2+b^2}}, M = 0 = N \end{cases}$$

$$H = -\frac{b}{2av\sqrt{a^2+b^2}}, K = 0$$

7.23

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	$-v \sin \varphi \sin u$	$v \sin \varphi \cos u$	0
\bar{r}_v	$\sin \varphi \cos u$	$\sin \varphi \sin u$	$\cos \varphi$
\bar{r}_{uu}	$-v \sin \varphi \cos u$	$-v \sin \varphi \sin u$	0
\bar{r}_{uv}	$-\sin \varphi \sin u$	$\sin \varphi \cos u$	0
\bar{r}_{vv}	0	0	0
\bar{N}	$\cos \varphi \cos u$	$\cos \varphi \sin u$	$-\sin \varphi$

$$\begin{cases} E = v^2 \sin^2 \varphi, F = 0, G = 1 \\ L = -v \sin \varphi \cos \varphi, M = N = 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{-ctg\varphi}{2v}, K = 0$$

Liniile asimptotice sunt $u = \text{const.}$

7.24 Se aplică direct formula cosinusului și faptul că $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$.

7.25 Parametrizăm suprafața $S : x = u, y = v, z = \frac{1}{2\rho}(u^2 + v^2)$ și obținem

$$E = 1 + \frac{u^2}{\rho^2}, F = \frac{uv}{\rho^2}, G = 1 + \frac{v^2}{\rho^2}.$$

Avem $C_1 : du = dv, C_2 : \delta v = -\frac{u}{v}\delta u$ din derivarea relației $2a\rho = u^2 + v^2$ folosind faptul că a și ρ sunt constante. Rezultă $Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = (1 - \frac{u}{v})du\delta u = 0$ deoarece la intersecția curbelor avem $u = v$ datorită lui C_1 . Deci cele două curbe sunt perpendiculare pe S .

7.26 Avem:

$$E = 1 + (1+v)^2, F = u(1+v), G = 1 + u^2.$$

Unghiul dintre curbele de coordonate este:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{u_0(1+v_0)}{\sqrt{(1+u_0^2)[1+(1+v_0^2)]}}$$

în punctul $M(u_0, v_0) \in S$. Fie ω_1 unghiul dintre Γ^{u_0} și C respectiv ω_2 unghiul dintre Γ^{v_0} și C . Pentru Γ^{u_0} avem $du = 0$, pentru Γ^{v_0} avem $dv = 0$ iar pentru C avem $\delta v = -\delta u$. Deci:

$$\begin{aligned}\cos \omega_1 &= \frac{Fdv\delta u + Gdv(-\delta u)}{\sqrt{G}dv\sqrt{E-2F+G}\delta u} = \frac{F-G}{\sqrt{G(E-2F+G)}} \stackrel{v=-u_0}{=} \\ &= \frac{u_0 - 2u_0^2 - 1}{\sqrt{(1+u_0^2)(4u_0^2-4u_0+3)}} \\ \cos \omega_2 &= \frac{Edu\delta u + Fdu(-\delta u)}{\sqrt{E}du\sqrt{E-2F+G}\delta u} = \frac{E-F}{\sqrt{E(E-2F+G)}} \stackrel{u=-v_0}{=} \\ &= \frac{2+3v_0+2v_0^2}{\sqrt{(v_0^2+2v_0+2)(4v_0^2+4v_0+3)}}.\end{aligned}$$

Am folosit faptul că punctul de intersecție dintre Γ^{u_0} și C este $M_1(u_0, -u_0)$ iar punctul de intersecție dintre Γ^{v_0} și C este $M_2(-v_0, v_0)$.

7.27 (i) Fie forma I-a fundamentală a unei suprafețe oarecare S :

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

respectiv forma a II-a fundamentală:

$$II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Asociem acestora matricele:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

și reamintim că I este inversabilă deoarece $\det I = EG - F^2 > 0$ din condiția de regularitate a lui S . Reamintim de asemenea, că curbura totală este $K = \det(II \cdot I^{-1})$ sau încă:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Atunci, folosind rezultatele de la problema 7.13 obținem relația cerută.

(ii) Considerăm $\psi = \psi(\varphi)$ și atunci relația din problemă devine:

$$K = \frac{\psi'\psi''}{\varphi(1+\psi'^2)^2} = -\frac{1}{R^2}$$

sau încă: $\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} = -\frac{\varphi}{R^2}$ care este o ecuație cu variabile separate și deci prin integrare obținem:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2}{R^2} + C$$

cu C o constantă reală pe care o alegem de forma $C = 1 - \frac{a^2}{R^2}$. Rezultă:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2 + R^2 - a^2}{R^2} \Rightarrow 1+\psi'^2 = \frac{R^2}{R^2 - a^2 + \varphi^2} \Rightarrow \psi'^2 = \frac{a^2 - \varphi^2}{R^2 - (a^2 - \varphi^2)}$$

și deci avem soluția generală, care este o familie 1-parametrică de suprafețe, numite *suprafețe pseudosferice*:

$$\psi_a = \psi_a(\varphi) = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varphi^2}{R^2 - (a^2 - \varphi^2)}} d\varphi.$$

Exemplu. Alegem $a = R$ și deci:

$$\psi = \psi(\varphi) = \int \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2}}{\varphi} d\varphi.$$

Dacă în plus luăm $\varphi = \varphi(u) = R \sin u$ atunci:

$$\psi = \psi(u) = R \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = R \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u} du = R \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) + C_0$$

pentru $\operatorname{tg} \frac{u}{2} > 0$ și C_0 constantă reală. Pentru $C_0 = 0$ obținem *pseudosfera* conform parametrizării de la problema 7.19.

7.28 Avem:

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	1	v	$3u^2$
\bar{r}_v	1	u	$3v^2$
\bar{r}_{uu}	0	0	$6u$
\bar{r}_{uv}	0	1	0
\bar{r}_{vv}	0	0	$6v$
\bar{N}	$\frac{3(v^3 - u^3)}{\sqrt{EG - F^2}}$	$\frac{3(u^2 - v^2)}{\sqrt{EG - F^2}}$	$\frac{u - v}{\sqrt{EG - F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + 9u^4 + v^2, F = 1 + uv + 9u^2v^2, G = 1 + u^2 + 9v^4$$

$$L = \frac{6u(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}, M = \frac{3(u^2-v^2)}{\sqrt{EG-F^2}}, G = \frac{6v(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

unde $EG - F^2 = (u-v)^2 + 9(u^2-v^2)^2 + 9(u^3-v^3)^2$. Reamintim că punctele parabolice sunt date de anularea curburii totale K deci satisfac ecuația $LN = M^2$. În cazul nostru avem ecuația:

$$4uv(u-v)^2 = (u^2-v^2)^2$$

care devine $(u-v)^4 = 0$. Deci locul geometric al punctelor parabolice de pe S este curba $\Gamma^{u=v}(u) = (2u, u^2, 2u^3)$ care, după cum se observă, este intersecția lui S cu paraboloidul hiperbolic $P_h : z = xy$.

7.29 Parametrizăm $S : x = u, y = v^3 - u, z = v$ și avem:

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	1	-1	0
\bar{r}_v	0	$3v^2$	1
\bar{r}_{uu}	0	0	0
\bar{r}_{uv}	0	0	0
\bar{r}_{vv}	0	$6v$	0
\bar{N}	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{3v^2}{\sqrt{EG-F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 2, F = -3v^2, G = 1 + 9v^4, EG - F^2 = 2 + 9v^4$$

$$L = M = 0, N = \frac{-6v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

și deci: $LN - M^2 = 0$ ceea ce voiam.

7.30 Avem:

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	chu	$shu \cos v$	$shu \sin v$
\bar{r}_v	0	$-chu \sin v$	$chu \cos v$
\bar{r}_{uu}	shu	$chu \cos v$	$chu \sin v$
\bar{r}_{uv}	0	$-shu \sin v$	$shu \cos v$
\bar{r}_{vv}	0	$-chu \cos v$	$-chu \sin v$
\bar{N}	$\frac{shu}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu \cos v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu \sin v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$

și deci:

$$E = ch^2u + sh^2u, F = 0, G = ch^2u, EG - F^2 = ch^2u (ch^2u + sh^2u)$$

$$L = \frac{-1}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}, M = 0, N = \frac{ch^2u}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}$$

de unde rezultă: $LN - M^2 = \frac{-ch^2u}{ch^2u + sh^2u} < 0$ ceea ce voiam.

7.31 (i) Știm că pentru sfera de rază R avem $K = \frac{1}{R^2} \neq 0$ conform problemei 7.14. De asemenea, conform unei proprietăți remarcabile a sferei centrate în origine (este esențial acest fapt!) distanța de la origine la planul tangent este $d = R$ deoarece raza este perpendiculară pe planul tangent. Prin urmare $\frac{K}{d^4} = \frac{1}{R^2 \cdot R^4} = \frac{1}{R^6} = \text{const.}$

(ii) Avem:

\bar{r}	x	y	z
\bar{r}_u	1	0	$-\frac{1}{u^2v}$
\bar{r}_v	0	1	$-\frac{1}{uv^2}$
\bar{r}_{uu}	0	0	$\frac{2}{u^3v}$
\bar{r}_{uv}	0	0	$\frac{1}{u^2v^2}$
\bar{r}_{vv}	0	0	$\frac{2}{uv^3}$
\bar{N}	$\frac{v}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$	$\frac{u^2v^2}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + \frac{2}{u^4v^2}, F = \frac{1}{u^3v^3}, G = 1 + \frac{1}{u^2v^4}, EG - F^2 = \frac{u^4v^4 + u^2 + v^2}{u^4v^4}$$

$$L = \frac{2v}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, M = \frac{1}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, N = \frac{2u}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$$

și deci:

$$K = \frac{3u^4v^4}{(u^4v^4 + u^2 + v^2)^2}.$$

Ecuția planului tangent în punctul curent este $T_pS : v(x - u) + u(y - v) + u^2v^2(z - \frac{1}{uv}) = 0$ și deci:

$$d = \frac{|-uv - uv - uv|}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}} = \frac{3uv}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}.$$

În concluzie:

$$\frac{K}{d^4} = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27} = \text{const.}$$

Observație: pe suprafața dată, curba $u(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{1}{t^2}$ este curba Țițeica (i) de la exercițiul 6.22.

(iii) Reamintim: dată S o suprafață având curbura totală negativă și $c : I \rightarrow S, c(t) = (u(t), v(t))$, o curbă pe S are loc *formula lui Enneper*:

$$\tau^2(t) = -K(u(t), v(t)).$$

Fie deci S suprafață Țițeica având $K < 0$ și c o linie asimptotică pe S . Din formula Enneper și proprietatea Țițeica rezultă că $\frac{\tau^2}{d^4} = \text{const.}$ unde d este distanța de la origine la planul tangent. Dar c fiind linie asimptotică, planul tangent coincide cu planul osculator și deci $\frac{\tau}{d^2} = \text{const.}$ cu d distanța de la origine la planul osculator, ceea ce spune că c este curbă Țițeica.

7.32 (i) Pentru $K = -1$ avem ecuația diferențială $\partial_r^2 \sqrt{G} = \sqrt{G}$ și se arată că $\sqrt{G}(0, \varphi) = 0, \partial_r \sqrt{G}(0, \varphi) = 1$. Deci notând $\sqrt{G}(r, \varphi) = x(r)$ avem problema Cauchy:

$$\begin{cases} x''(r) = x'(r) \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

cu soluția unică $x(r) = shr$ și deci, în final, soluția unică $G(r, \varphi) = sh^2 r$.

(ii) Teorema Egregium afirmă următoarea expresie a curburii totale:

$$2\sqrt{EG - F^2} \cdot K = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{E\sqrt{EG - F^2}} \right) \quad (*)$$

care pentru $F = 0$ devine relația cerută.

Alte expresii ale curburii totale:

-dacă $g_{11} = g_{22}$ și $g_{12} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{\Delta(\ln g_{11})}{2g_{11}}$$

(a se vedea și prima relație de la ex. 2.42)

-dacă $g_{11} = g_{22} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u \partial v}.$$

(iii) Din (*) avem:

$$\sqrt{1 - F^2} K = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F_u}{\sqrt{1 - F^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-\sin \varphi \cdot \varphi_u}{\sin \varphi} \right)$$

de unde concluzia.

În lucrarea:

Myller, A., *Rețelele lui Cebîșev și paralelismul lui Levi-Civita*, Matematica (Cluj), 1(1929), 48-53,
se redă povestea introducerii acestor rețele. Este singura sursă dintr-o bibliografie foarte amplă cercetată de autorul acestei culegeri în care apare această istorie!

Cităm:

”În anul 1878 la congresul Asociațiunii franceze pentru înaintarea științelor, geometrul rus Cebîșev a făcut o comunicare intitulată <<Sur la coupe des vêtements>>. A arătat atunci cum se poate îmbraca orice suprafață cu o singură bucată de stofă.

El consideră stofa ca formată din două rânduri de fire care se încrucișează. Aceste fire sânt înnodate în punctele lor de întretăere astfel că distanța dintre două puncte consecutive să fie peste tot aceeași. Când se deformează stofa, această distanță rămâne invariabilă, numai unghiul ce fac două fire în punctul lor de întretăere poate să se schimbe.

Dacă consider stofa într’o poziție deformată oarecare și iau două fire care se încrucișează ca linii coordonată de origină, atunci un punct oarecare al stofei poate să fie determinat prin două coordonate α și β care sunt distanțele punctului la liniile coordonată de origină măsurate dealungul firelor ce trec prin acel punct:

$$\alpha = MQ, \quad \beta = MP.$$

Avem atunci:

$$MM_1 = d\alpha, \quad MM_2 = d\beta$$

și prin urmare:

$$(M_1M_2)^2 = ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos\theta d\alpha d\beta$$

unde θ este unghiul M_1MM_2 . θ este o funcție de α , β și această funcție depinde de modul în care a fost deformată stofa.

Rezultă că pentru a îmbrăca o suprafață cu o singură bucată de stofă trebuie deslegat problemul următor de geometrie: Fiind dată o suprafață al cărei element liniar este

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

să se facă o schimbare de coordonate, înlocuind variabilele u, v prin altele α, β alese astfel ca elementul liniar să ia forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\bar{F}d\alpha d\beta + d\beta^2$$

unde am însemnat $\cos \theta$ prin $\overline{F}(\alpha, \beta)$."

Încheiem această istorioară notând că, deși este numit "geometru" de către Al. Myller, matematicianul rus P. L. Cebîșev (1821-1894) este celebru în alte domenii ale matematicii:

- crearea teoriei celei mai bune aproximări,
- teoria probabilităților,
- teoria numerelor.

7.33 (i) Pentru $K = -1$ avem ecuația diferențială

$$f''(u) = f(u) \left(1 + (f'(u))^2 \right)^2.$$

(ii) Rezultatul binecunoscut $K = \frac{1}{R^2}$.

7.34 Pentru $K = -1$ avem $\varphi(u) = u^2 + c$ adică $f(u) = \int \sqrt{\frac{1}{u^2+c} - 1} du$ care este o integrală eliptică pentru marea majoritate a valorilor lui c . Dar pentru $c = 0$ avem:

$$f(u) = \sqrt{1-u^2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{1-u^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \sqrt{1-u^2} \right).$$

Pentru $K = 0$ avem $\varphi(u) = c$ adică $f'(u) = \text{const.} = C_1$ de unde rezultă $f(u) = C_1 u + C_2$.

7.35 (i) Pentru $K = -1$ avem ecuația diferențială $v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = e^{2v(r)}$.

(ii) Obținem cu formula dată $K = -32 \frac{(1+2r^2)^2}{(1-r^2)^4}$.

7.36 Calcul imediat.

7.37 O formă mai utilă pentru calcule practice este dată de:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Folosind formulele precedente obținem:

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

și toți ceilalți simbolii Christoffel sunt nuli.

(ii) Folosind rezultatele de la exercițiul 2.16 cu $r = u, \varphi = v$ avem:

$$\Gamma_{22}^1 = -u, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{u^2 + h^2}$$

toți ceilalți simbolii Christoffel fiind nuli.

(iii) Aplicând exercitiul anterior avem:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

7.39 Fie $\{e_1, e_2\}$ o bază ortonormată în spațiul tangent $T_{X(z)}S$. Din relația de definiție avem că vectorii $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \in T_{X(z)}S$ sunt ortogonali și au aceeași normă, deci există funcția $\omega : W \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = e^\omega e_1, \frac{\partial X}{\partial y} = e^\omega e_2. \quad (1)$$

Rezultă forma I-a fundamentală:

$$I = e^{2\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Fie forma a II-a fundamentală:

$$II = e^{2\omega} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Atunci:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}, K = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Dar $II = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} \rangle & \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} \rangle \\ \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} \rangle & \langle \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} \rangle \end{pmatrix}$ și deci: $h_{11} = e^{-2\omega} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} \rangle$, $h_{22} = e^{-2\omega} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} \rangle$ de unde rezultă:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} \rangle$$

sau cu notația cunoscută $\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} \langle \Delta X, \overline{N} \rangle \quad (5)$$

unde, ca de obicei: $\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}}{\|\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\|}$.

O altă proprietate remarcabilă este faptul că ΔX este vector perpendicular pe $\frac{\partial X}{\partial x}$ și $\frac{\partial X}{\partial y}$. În adevăr, derivând relația $\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \rangle = 0$ în raport cu x și relația $\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial y} \rangle$ în raport cu y avem:

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \frac{\partial X}{\partial y} \rangle + \langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \frac{\partial X}{\partial y} \rangle = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \frac{\partial X}{\partial x} \rangle \end{cases}$$

de unde rezultă $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial y}$. Datorită rolului simetric al variabilelor x, y avem și $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial x}$.

Din această ultimă proprietate și relația (5) rezultă că putem scrie: $\Delta X = \langle \Delta X, \overline{N} \rangle \overline{N} \stackrel{(5)}{=} 2He^{2\omega} \overline{N}$ sau încă, ținând cont de expresia lui \overline{N} și relațiile (1):

$$\Delta X = 2H \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} \quad (6)$$

deoarece e_1, e_2 sunt ortonormați.

7.40 Din relația (6) de la problema precedentă rezultă că o suprafață este minimală dacă și numai dacă este imaginea unei aplicații conforme *armonice* adică satisface, pe lângă condiția de conformitate, și condiția: $\Delta X = \overline{0}$.

Să notăm că din $2H = h_{11} + h_{22} = 0$ rezultă $h_{22} = -h_{11}$ și deci expresia curburii totale pentru o suprafață minimală conformă este, în notațiile de la problema precedentă:

$$H = -h_{11}^2 - h_2^2.$$

Deci pentru a afla suprafețe minimale căutăm aplicații $X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

(Si) X este conformă, ceea ce se poate scrie:

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial X}{\partial y} \right\|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \right\rangle = 0$$

folosind faptul că un număr complex este nul dacă și numai dacă sunt nule părțile reală și imaginară,

(Sii) $\Delta X = \overline{0}$.

Folosind notațiile consacrate: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ obținem că: $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ și prin urmare cele două condiții precedente devin:

$$(i) \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial X^3}{\partial z} \right)^2 = 0$$

$$(ii) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right) = \bar{0}$$

unde am notat $X = (X^1, X^2, X^3)$. Cu notația $f = \frac{\partial X}{\partial z} : W \rightarrow \mathbb{C}^3$ avem deci sistemul:

$$(S1) \ (f^1)^2 + (f^2)^2 + (f^3)^2 = 0$$

$$(S2) \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{0}$$

care admite soluția

$$f = \left(\frac{1}{2} (1 - w^2), \frac{i}{2} (1 + w^2), w \right) h$$

cu $w, h : W \rightarrow \mathbb{C}$ funcții olomorfe. Reamintim că o funcție $\varphi : W \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ este *olomorfă* dacă $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$. În concluzie, obținem:

$$X(z) = \operatorname{Re} \left[\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right]$$

unde z_0 este punct arbitrar în W iar integrarea se face după o curbă în W ce unește z_0 și z . Relația precedentă este faimoasa *reprezentare Weierstrass* a suprafețelor minimale (alți autori o numesc reprezentarea Enneper-Weierstrass) apărută în:

Weierstrass, K., *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, 612-625.

Trebuie de altfel notat că bibliografia relativ la suprafețe minimale, la care se adaugă recent cea relativ la suprafețe CMC ("constant mean curvature") este impresionantă!

Fie N polul nord al sferei $S^2 = \{\bar{x} \in IR^3; \|x\| = 1\}$ și proiecția stereografică $\tau : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow C$:

$$\tau(x^1, x^2, x^3) = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3}$$

care este o bijecție cu inversa:

$$\tau^{-1}(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} (2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1).$$

Vom arăta ca $w = \tau \circ \bar{N}$.

În adevăr:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \operatorname{Re} \left(\frac{h}{2} (1 - w^2), \frac{ih}{2} (1 + w^2), hw \right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\operatorname{Im} \left(\frac{h}{2} (1 - w^2), \frac{ih}{2} (1 + w^2), hw \right)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} = \\ & = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \left(\frac{ih}{2} (1 + w^2) \right) \operatorname{Im} (hw) + \operatorname{Re} (hw) \operatorname{Im} \left(\frac{ih}{2} (1 + w^2) \right) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{h}{2} (1 - w^2) \right) \operatorname{Im} (hw) - \operatorname{Re} (hw) \operatorname{Im} \left(\frac{h}{2} (1 - w^2) \right) \\ -\operatorname{Re} (h(1 - w^2)) \operatorname{Im} \left(\frac{ih}{4} (1 + w^2) \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{ih}{4} (1 + w^2) \right) \operatorname{Im} (h(1 - w^2)) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \left[\frac{ih}{2} (1 + w^2) \overline{hw} \right] \\ \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} h(1 - w^2) hw \right] \\ \operatorname{Im} \left[\frac{-i}{4} \overline{h(1 + w^2)} h(1 - w^2) \right] \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} |h|^2 \operatorname{Re} (\overline{w} + |w|^2 w) \\ \frac{1}{2} |h|^2 \operatorname{Im} (w - |w|^2 \overline{w}) \\ \frac{1}{4} |h|^2 \operatorname{Re} (|w|^4 - 1 - \overline{w}^2 + w^2) \end{pmatrix} = \frac{|h|^2 (1 + |w|^2)}{4 (1 + |w|^2)} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} w \\ 2 \operatorname{Im} w \\ |w|^2 - 1 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{|h|^2 (1 + |w|^2)^2}{4} \tau^{-1} \circ w. \end{aligned}$$

Deoarece $\tau^{-1} \circ w \in S^2$ rezultă că $\|\tau^{-1} \circ w\| = 1$. Aplicația X fiind conformă rezultă despre prima formă fundamentală că avem $g_{12} = g_{21} = 0$ și:

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\omega} = \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial X}{\partial y} \right\| = \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} \right\| = \frac{|h|^2 (1 + |w|^2)^2}{4}. \quad (7)$$

În concluzie:

$$\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} \right\|} = \tau^{-1} \circ w$$

ceea ce voiam. Din acest motiv aplicația $w = \tau \circ \overline{N}$ se numește *aplicația Gauss* a lui X .

Calculul acestei probleme au fost adaptate după volumul:

Fang, Yi; *Lectures on minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, The Australian National University, vol. 35, 1996.

Observații.

(i) Condiția (Sii) spune că cele 3 funcții componente ale funcției vectoriale \overline{X} sunt funcții armonice; altfel spus funcția vectorială \overline{X} este armonică!

Generalizarea imediată se referă la funcții bi-armonice și pentru aspecte geometrice deosebit de interesante ale acestor funcții trimitem la:

1) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3* , Internat. J. Math., 12(2001), no. 8, 867-876,

2) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math., 130(2002), 109-123,

3) Caddeo, R., Montaldo, S., Piu, P., *Biharmonic curves on a surface*, Rendiconti di Matematica-Roma, Serie VII, 21(2001), 143-157.

(ii) Prezentăm o versiune a reprezentării Weierstrass adaptată după lucrările:

1) Taimanov, I. A., *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, Trans. A.M.S., Ser. 2, 179(1997), 133-151. (dg-ga/9511005)

2) Taimanov, I. A., *The Weierstrass representation of closed surfaces in \mathbb{R}^3* , dg-ga/9710020.

Considerăm perechea de funcții de o variabilă complexă $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, prima funcție fiind anti-olomorfă iar a doua funcție olomorfă; deci este satisfăcut sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (*).$$

Atunci aplicația $z \in \mathbb{C} \rightarrow (X^1(z, \bar{z}), X^2(z, \bar{z}), X^3(z, \bar{z})) \in \mathbb{R}^3$ dată de:

$$\begin{cases} X^1 + iX^2 = i \int_{\gamma} (\bar{\psi}_1^2 dz' - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}') \\ X^1 - iX^2 = i \int_{\gamma} (\psi_2^2 dz' - \psi_1^2 d\bar{z}') \\ X^3 = - \int_{\gamma} (\psi_2 \bar{\psi}_1 dz' + \psi_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z}') \end{cases}$$

reprezintă parametrizarea conformă a unei suprafețe minimale. Integrala se calculează pe un drum γ unind punctul complex z cu un punct inițial z_0 . Din ecuațiile (*) rezultă că integranzii sunt forme diferențiale închise și deci valoarea integralelor este independentă de drumul γ .

Această reprezentare se generalizează imediat pentru suprafețe de curbă medie constantă, nu neapărat nulă. Condiția (*) se înlocuiește cu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = U \psi_2 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = -U \psi_1 \end{cases} \quad (**)$$

cu "potențialul" U având valori reale. Atunci fie S suprafața cu parametrizarea (X^1, X^2, X^3) de mai sus. Rezultă prin calcul că avem o parametrizare con-

formă a lui S i.e. forma I-a fundamentală are expresia: $I = D^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ cu:

$$D(z, \bar{z}) = |\psi_1(z, \bar{z})|^2 + |\psi_2(z, \bar{z})|.$$

Curbura totală este:

$$K = -\frac{1}{D^2} \Delta(\log D)$$

iar curbura medie este:

$$H = \frac{2U}{D}$$

de unde rezultă pentru cazul particular $U = 0$ condiția (*).

Sistemul (**) admite scrierea: $\mathcal{D}\psi = 0$ unde:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial} \\ -\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

cu $\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Operatorul \mathcal{D} este numit *operator Dirac* cu potentialul U .

Reprezentarea Weierstrass generalizată (**) este extinsă la suprafețe în \mathbb{R}^4 în lucrările:

1) Konopelchenko, B. G., *Weierstrass representation for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, math.DG/9807129

2) Konopelchenko, B. G., Landolfi, G., *Induced surfaces and their integrable dynamics. II. Generalized Weierstrass representations in 4D spaces and deformations via DS hierarchy*, math.DG/9810138.

(iii) O altă reprezentare de tip Weierstrass pentru suprafețe de curbura medie constantă nenulă apare în:

Kenmotsu, K., *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., 245(1979), 89-99.

Parametrizarea Kenmotsu este dată de formula:

$$\bar{X} = \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} \eta \bar{\varphi} dz' \right)$$

unde $\bar{\varphi} = (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)$ iar funcțiile f, η satisfac condiția de "compatibilitate":

$$\frac{\partial \log \eta}{\partial \bar{z}} = -\frac{2\bar{f} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{1 + |f|^2}. (\#)$$

Pentru această parametrizare curbura medie este:

$$H = -\frac{2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{\bar{\eta}(1+|f|^2)^2}.$$

Reprezentarea Kenmotsu și cea generalizată Weierstrass (**) sunt echivalente și legătura între perechile (f, η) , (ψ_1, ψ_2) este:

$$f = i\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2}, \eta = i\psi_2^2$$

respectiv:

$$U = -\frac{\eta\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{\sqrt{\eta\bar{\eta}}(1+|f|^2)}.$$

Deși echivalente, reprezentarea Kenmotsu este mai dificilă în practică datorită condiției (#).

7.41 La problema anterioară am obținut forma I-a fundamentală și aplicația Gauss în funcție de datele (w, h) ale reprezentării Weierstrass.

Se arată, prin calcul, că pentru o metrică conformă $ds^2 = e^{2\omega}|dz|^2$ avem curbura Gauss:

$$K = -\frac{1}{2e^{2\omega}}\Delta(\log e^{2\omega}) = -\frac{2}{e^{2\omega}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}(\log e^{2\omega}).$$

Aplicând formula (7) de la exercițiul anterior rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}(\log e^{2\omega}) &= 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}(\log |h|) + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}(\log(1+|w|^2)) \stackrel{\log |h| = \text{armonic}}{=} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{w'\bar{w}}{1+|w|^2} = 2\frac{w'\bar{w}'(1+|w|^2) - w'\bar{w}w\bar{w}'}{(1+|w|^2)^2} = \frac{2|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\end{aligned}$$

și deci:

$$K = -\frac{16|w'|^2}{|h|^2(1+|w|^2)^4} = -\left[\frac{4|w'|}{|h|(1+|w|^2)^2}\right]^2.$$

Forma a II-a fundamentală este:

$$\begin{cases} b_{11} = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \bar{N} \rangle = \langle \operatorname{Re}(f^{1'}, f^{2'}, f^{3'}), \bar{N} \rangle \\ b_{22} = -b_{11} \\ b_{12} = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \bar{N} \rangle = -\langle \operatorname{Im}(f^{1'}, f^{2'}, f^{3'}), \bar{N} \rangle \end{cases}.$$

Avem:

$$b_{11} = \langle \operatorname{Re} \left[\left(\frac{h'}{2} (1 - w^2), \frac{ih'}{2} (1 + w^2), h'w \right) + (-hww', ihww', hw') \right], \bar{N} \rangle =$$

și după un calcul complicat:

$$b_{11} = -\operatorname{Re} (hw').$$

Analog avem:

$$b_{12} = \operatorname{Im} (hw')$$

de unde rezultă că pentru o suprafață minimală funcția $b_{11} - ib_{12} = -hw'$ este o funcție olomorfă. Deoarece:

$$(dz)^2 = (dx)^2 - (dy)^2 + 2idxdy$$

avem:

$$\begin{aligned} b_{11} (dx)^2 + b_{12} dx dy + b_{22} (dy)^2 &= -\operatorname{Re} (hw') \left((dx)^2 - (dy)^2 \right) + 2 \operatorname{Im} (hw') dx dy = \\ &= -\operatorname{Re} (hw') \operatorname{Re} (dz)^2 + \operatorname{Im} (hw') \operatorname{Im} (dz)^2 = -\operatorname{Re} [hw' (dz)^2] = -\operatorname{Re} (hdwdz). \end{aligned}$$

Fie $V \in T_p S$ un vector tangent de normă 1 pe care-l vom scrie:

$$V = e^{-\omega} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(e^{-\omega} e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial z} \right) = e^{-\omega} e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial z} e^{-\omega} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

de unde rezultă:

$$II(V, V) = -e^{-2\omega} \operatorname{Re} (hw' e^{2i\theta}).$$

Obținem astfel curbura principală:

$$k_1 = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} -e^{-2\omega} \operatorname{Re} (hw' e^{2i\theta}) = e^{-2\omega} |hw'| = \frac{4|w'|}{|h|(1 + |w|^2)}$$

$$k_2 = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} -e^{-2\omega} \operatorname{Re} (hw' e^{2i\theta}) = -e^{-2\omega} |hw'| = -\frac{4|w'|}{|h|(1 + |w|^2)}$$

și din relația $K = k_1 \cdot k_2$ reobținem formula lui K de mai sus.

Fie $r(t) = x(t) + iy(t)$ o curbă pe S . Cum $r'(t) = x'(t) + iy'(t)$ folosind expresia de mai sus a formei a II-a fundamentale avem:

$$II(r'(t), r'(t)) = -\operatorname{Re}\{h(r(t)) w'(r(t)) [r'(t)]^2\} (dt)^2 =$$

$$= -\operatorname{Re}\{d[w(r(t))]h[r(t)]dr(t)\}.$$

Reamintim că această curbă $t \rightarrow r(t)$ este

(i) *linie asimptotică* dacă $II(r'(t), r'(t)) = 0$

(ii) *linie de curbură* dacă $r'(t)$ este direcție principală adică dacă $[r'(t)]^{-2} II(r'(t), r'(t))$ este o valoare minimă sau maximă a lui $II(v, v)$ pe mulțimea vectorilor unitari din $T_{r(t)}S$.

Cu relația precedentă obținem caracterizările:

(i) $r(t)$ este linie asimptotică dacă și numai dacă

$$h[r(t)]w'[r(t)][r'(t)]^2 \in i\mathbb{R}$$

(ii) $r(t)$ este linie de curbură dacă și numai dacă

$$h[r(t)]w'[r(t)][r'(t)]^2 \in \mathbb{R}.$$

Calculule sunt prezentate după aceeași monografie folosită la problema precedentă.

7.42 (i)

I) *Catenoidul*

Se obține luând: $w(z) = z, h(z) = \frac{1}{z^2}$. Avem deci, în notațiile problemei 7.41:

$$f(z) = \left(\frac{1-z^2}{2z^2}, \frac{i(1+z^2)}{2z^2}, \frac{1}{z} \right).$$

Curbura totală este $K = -4\pi$. Catenoidul este o suprafață de rotație și efectuând calculele obținem ecuația sa implicită:

$$x^2 + y^2 = ch^2z$$

și deci ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = chu \cos v \\ y = chu \sin v \\ z = u \end{cases}.$$

Forma I-a fundamentală este:

$$I = ch^2u(du^2 + dv^2)$$

iar forma a II-a fundamentală:

$$II = -du^2 + dv^2.$$

Fig.7 Catenoidul.

Se arată că singurele suprafețe minimale de rotație sunt planul și catenoidul.

II) Elicoidul

Data suprafața minimală S cu reprezentarea Weierstrass $\overline{X} = \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f dz' \right)$ putem asocia lui S o întreagă familie de suprafețe minimale $S_{\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ cu reprezentarea Weierstrass:

$$\overline{X}_{\theta} = \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \int_{\gamma} f dz' \right).$$

Suprafața $S_{\frac{\pi}{2}}$ se numește *suprafața conjugată* suprafeței minimale S .

Elicoidul este suprafața minimală conjugată catenoidului și deci are reprezentarea Weierstrass dată de:

$$f(z) = \left(\frac{i(1-z^2)}{2z^2}, -\frac{1+z^2}{2z^2}, \frac{i}{z} \right).$$

Pentru geometria elicoidului a se vedea problema 7.16. Se arată că singurele suprafețe minimale riglate sunt planul și elicoidul.

III) Suprafața Enneper

Luăm $h = 1, w(z) = z$ și deci avem în reprezentarea Weierstrass:

$$f(z) = \left(\frac{1-z^2}{2}, \frac{i(1+z^2)}{2}, z \right).$$

Pentru geometria suprafeței Enneper a se vedea problema 7.15.

IV) *Elicoidul răsucit* ("Twisted Elicoid")

Conform lucrării:

Nitsche, J. C. C., *A characterization of the catenoid*, J. Math. Mech., 11(1962), 293-301,

această suprafață are parametrizarea:

$$S : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = \int_1^u \frac{w^2 dw}{\Delta(w)} + u \sin v \\ z = \int_1^u \frac{dw}{\Delta(w)} \end{cases} \quad \text{unde } \Delta(w) = \sqrt{w^4 - 1}.$$

Avem:

	x	y	z
\bar{r}_u	$\cos v$	$\frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}} + \sin v$	$\frac{1}{\sqrt{u^4-1}}$
\bar{r}_v	$-u \sin v$	$u \cos v$	0
\bar{r}_{uu}	0	$-\frac{2u}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{2u^3}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$
\bar{r}_{uv}	$-\sin v$	$\cos v$	0
\bar{r}_{vv}	$-u \cos v$	$-u \sin v$	0
\bar{N}	$-\frac{u \cos v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$-\frac{u \sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$\frac{u\sqrt{u^4-1}+u^3 \sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$

de unde rezultă:

$$E = \frac{2u^2 \sin v}{\sqrt{u^4-1}} + \frac{2u^4}{u^4-1}, F = \frac{u^3 \cos v}{\sqrt{u^4-1}}, G = u^2$$

$$L = \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{2u^2 \sin v}{u^4-1} + \frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}} \right), M = 0, N = \frac{u^2}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$$

și deci:

$$\begin{aligned} & (EN - 2FM + GL) \sqrt{EG - F^2} = \\ & = \frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}} \left(\frac{2u^2 \sin v}{\sqrt{u^4-1}} + \frac{2u^4}{u^4-1} \right) - u^2 \left(\frac{2u^2 \sin v}{u^4-1} + \frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \end{aligned}$$

deci această suprafață este minimală! Propunem cititorului găsirea reprezentării Weierstrass asociate!

V) *Suprafața lui Scherk*

$$S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \ln \frac{\cos v}{\cos u} \end{cases}.$$

Pentru această suprafață avem:

$$\begin{array}{ccccc} & x & y & z & \\ \bar{r}_u & 1 & 0 & -tgu & \\ \bar{r}_v & 0 & 1 & -tgv & \\ \bar{r}_{uu} & 0 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 u} & \\ \bar{r}_{uv} & 0 & 0 & 0 & \\ \bar{r}_{vv} & 0 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 v} & \\ \bar{N} & \frac{tgu}{\sqrt{\Delta}} & \frac{tgv}{\sqrt{\Delta}} & \frac{1}{\sqrt{\Delta}} & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{\cos^2 u}, F = tgu tgv, G = \frac{1}{\cos^2 v}, \Delta := EG - F^2 = \frac{1 - \sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \\ L = \frac{-1}{\cos^2 u \sqrt{\Delta}}, M = 0, N = \frac{-1}{\cos^2 v \sqrt{\Delta}} \end{array} \right.$$

și deci:

$$H = \frac{\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{-1}{\cos^2 u}}{2\Delta^{3/2}} = 0$$

ceea ce voiam.

VI) *Suprafața lui Catalan*

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x = u - \sin u \cosh v \\ y = 1 - \cos u \cosh v \\ z = 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \end{array} \right.$$

VII) *Suprafața lui Henneberg*

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x = 2shu \cos v - \frac{2}{3}sh(3u) \cos(3v) \\ y = 2shu \sin v + \frac{2}{3}sh(3u) \sin(3v) \\ z = 2ch(2u) \cos(2v) \end{array} \right.$$

(ii) Avem 3 definiții echivalente ale suprafețelor minimale:

- (a) imaginea unei imersii conforme armonice
- (b) suprafață având curbura medie nulă (definiția cu caracter geometric).

Să notăm:

-curbura totală a fost introdusă de Gauss(1777-1855) în 1828

-curbura medie a fost introdusă de Sophie Germain în 1831 și este folosită, spre exemplu, în teoria elasticității

-o altă curbura a fost introdusă de fizicianul român Emanoil Bacaloglu într-un articol din "Zeitschrift der Mathematik und Physik" în 1859.

(c) punct de minim al funcționalei arie (prima definiție din punct de vedere istoric, constituie așa numita *problemă Plateau*).

Legătura între (a) și (b) este dată de relația (6) de la exercițiul 7.40, a se vedea și începutul ex. 7.41. Avem deci ecuația suprafețelor minimale,

$H = 0$, sau deoarece:

$$H = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (*)$$

avem ecuația:

$$b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0. \quad (1)$$

Să demonstrăm relația (*). Reamintim că $H = Tr(II \cdot I^{-1})$ și din:

$$II = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} I^{-1} &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \\ II \cdot I^{-1} &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11}g_{22} - b_{12}g_{12} & -b_{11}g_{12} + b_{12}g_{11} \\ b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12} & b_{22}g_{11} - b_{12}g_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de unde concluzia. Cu notațiile lui Gauss relația (1) se scrie:

$$G \cdot L - 2F \cdot M + E \cdot N = 0. \quad (1')$$

Punctul de pornire al teoriei suprafețelor minimale îl constituie studiul lui Lagrange (1736-1813) din 1760 al punctelor de minim ale funcționalei arie, deci definiția (c) de mai sus, ceea ce dă și explicația denumirii de "minimale". El consideră suprafața ca fiind dată explicit $z = f(x, y)$ și prelucrând ecuația Euler-Lagrange a funcționalei arie ajunge la ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) = 0$$

unde p și q sunt notațiile Monge, a se vedea ex. 2.17, iar $w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. În final, se ajunge la ecuația cu derivate parțiale:

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0. \quad (2)$$

Astfel, Lagrange observă că o funcție liniară în x și y satisface (2) datorită derivatelor de ordin 2 și deci planul este suprafață minimală. În 1915 S. Berstein demonstrează că dată funcția f de clasă C^2 al cărei grafic este o suprafață minimală atunci f este liniară!

Abia în 1776, Meusnier observă că interpretarea geometrică a relației (2) este anularea a ceea ce mai târziu va fi numită curbura medie. Mai precis, un calcul imediat dă expresia:

$$H = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \quad (\#)$$

(a se vedea și exercițiul 7.17).

Să presupunem acum suprafața dată implicit $S : F(x, y, z) = 0$. Din relația $F(x, y, f(x, y)) = 0$ rezultă:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y = -\frac{F_y}{F_z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = \frac{F_x(F_{xz}F_z - F_{zz}F_x) - F_z(F_{xx}F_z - F_{xz}F_x)}{F_z^3} \\ f_{xy} = \frac{F_x(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{xy}F_z - F_{xz}F_y)}{F_z^3} \\ f_{yy} = \frac{F_y(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{yy}F_z - F_{yz}F_y)}{F_z^3} \end{cases}$$

și înlocuind în (#) obținem ecuația:

$$2(F_{xy}F_xF_y + F_{yz}F_yF_z + F_{zx}F_zF_x) = F_{xx}(F_y^2 + F_z^2) + F_{yy}(F_z^2 + F_x^2) + F_{zz}(F_x^2 + F_y^2). \quad (3)$$

Pentru alte amănunte relativ la ecuația suprafețelor minimale a se vedea și:

a) Griffin, Sarah Field, *Minimal surfaces: a derivation of the minimal surface equation for an arbitrary C^2 coordinate chart*, Missouri J. Math. Sci., 13(2001), no. 3, 145-153.

7.43 Fie în spațiul \mathbb{R}^n hipersuprafața S orientată, cu versorul normalei N . Dat $p \in S$ notăm $T_p S$ spațiul tangent în p la S și atunci avem transformarea liniară $W : T_p S \rightarrow T_p S$, $W(v) = -\nabla_v N$ unde prin ∇_v am notat derivata relativ la $v \in T_p S$. Aplicația liniară W se numește *aplicația Weingarten* și prin definiție *curbura Gauss* a lui S este determinantul K al acestei aplicații liniare.

În cazul $n = 2$ curbura Gauss K a unei curbe C este exact curbura uzuală k dacă luăm N ca fiind normala la C . În cazul înlocuirii lui N cu $(-N)$ avem $K = -k$. În cazul general, dacă n este impar atunci K nu depinde de alegerea lui N iar dacă n este par atunci K își schimbă semnul la schimbarea lui N .

Relativ la expresia lui K în cazul hipersuprafețelor implicite, în lucrarea:

Shin-ichi Nishimura, Masao Hashiguchi, *On the Gaussian curvature of the indicatrix of a Lagrange space*, Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., 24(1991), 33-41,

la pagina 37 este demonstrat următorul rezultat:

Propoziție Fie hipersuprafața $S = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0, (\nabla f)(x) \neq 0\}$, cu $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ și versorul normalei $N = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. Atunci curbura Gauss a perechii (S, N) este:

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} f_{ij} & f_i \\ f_j & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^{n+1}}$$

unde $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$.

Pentru alte amănunte a se vedea și lucrările:

(i) M. Hashiguchi, *On a Finsler-geometrical expression of the Gaussian curvature of a hypersurface in an Euclidian space*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., 25(1992), 21-27.

7.44 (i) Fie suprafața oarecare S cu forma I-a fundamentală $I = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ și forma a II-a fundamentală $II = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$. Conform [?, p. 298] avem:

(i) ecuația Gauss:

$$\det II = \sum_{i=1}^2 g_{1r} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{12}^m \Gamma_{m2}^r) \right\}$$

(ii) ecuațiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u_2} = \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{11}^r l_{r2} - \Gamma_{12}^r l_{r1}) \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} = \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r2} - \Gamma_{22}^r l_{r1}) \end{cases}.$$

Reamintim că pentru o suprafață conformă avem cf. ex. 7.42:

$$I = e^{2w} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II = e^{2w} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

și deci avem:

(i) ecuația Gauss:

$$b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = -e^{2w} \Delta w$$

(ii) ecuațiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} = -(b_{11} + b_{22}) \frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} = (b_{11} + b_{22}) \frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}.$$

Dar $b_{11} + b_{22} = 2H$ deci putem scrie ecuațiile Codazzi:

$$\begin{cases} b_{12,1} - b_{11,2} = -2Hw_2 \\ b_{22,1} - b_{12,2} = 2Hw_1 \end{cases}$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(ii) Dacă $H = 0$ ecuațiile Codazzi devin:

$$\begin{cases} b_{12,1} = b_{11,2} \\ b_{12,2} = -b_{11,1} \end{cases} \quad (1)$$

care sunt exact ecuațiile Cauchy-Riemann din teoria funcțiilor complexe.

Deci există o funcție armonică m astfel încât:

$$\begin{cases} b_{11} = -b_{22} = m_1 \\ b_{12} = m_2 \end{cases}.$$

Fie funcțiile A, φ așa încât:

$$\begin{cases} b_{11} = m_1 = A \cos \varphi \\ b_{12} = m_2 = A \sin \varphi \end{cases}.$$

Ecuatia Gauss devine:

$$A^2 = e^{2w} \Delta w. (*)$$

Ecuatia (1₁) devine:

$$A_2 \cos \varphi - A \sin \varphi \varphi_2 - A_1 \sin \varphi - A \cos \varphi \varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Exprimăm faptul că m este funcție armonică:

$$m_{11} + m_{22} = (A \cos \varphi)_1 + (A \sin \varphi)_2 = 0$$

adică:

$$A_2 \sin \varphi + A \cos \varphi \varphi_2 + A_1 \cos \varphi - A \sin \varphi \varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Înmulțind ec. (2) cu $\cos \varphi$, ec. (3) cu $\sin \varphi$ și adunând avem: $A_2 - A \varphi_1 = 0$ adică:

$$\varphi_1 = \frac{A_2}{A}. \quad (4)$$

Analog, înmulțind ec. (2) cu $(-\sin \varphi)$, ec. (3) cu $\cos \varphi$ și adunând avem: $A_1 + A \varphi_2 = 0$ adică:

$$\varphi_2 = -\frac{A_1}{A}. \quad (5)$$

Dar ecuațiile (4), (5) exprimă exact faptul că funcțiile φ și $\ln A$ sunt armonice conjugate. Din (*) avem:

$$\ln A = w + \frac{1}{2} \ln \Delta w.$$

Punctul (ii) urmărește articolul:

Amato, F., *Sulle superficie minime e le metriche isoterme*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5), 60(1974), 36-42.

7.45 (i) Deoarece g este constantă rezultă $\Gamma_{ij}^k = 0, 1 \leq i, j, k \leq 2$ și deci ecuația Gauss devine: $\det b = 1 = 0$, fals.

(ii) Un calcul imediat, folosind formulele de la ex. 7.37, dă: $\Gamma_{11}^1 = \frac{u^1}{1+(u^1)^2}$ și toți ceilalți simbolii Christoffel sunt nuli. Ecuatia Gauss devine: $\det b = u^1 = 0$, fals.

7.46 Fie $g = (g_{ij} = \langle \bar{r}_i, \bar{r}_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2}$ forma I-a fundamentală și $g^{-1} = (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ matricea inversa. Fie $(b_{ij} = \langle \bar{r}_{ij}, \bar{N} \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2}$ forma a II-a fundamentală și $(b_i^k = g^{ka} b_{ai})_{1 \leq i, k \leq 2}$ contracția cu g^{-1} . Fie $(\Gamma_{ij}^k)_{1 \leq i, j, k \leq 2}$ simbolii Christoffel, a se vedea ex. 7.37.

Prin derivarea în raport cu u^i a relației $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 1$ rezultă că vectorul \bar{N}_i este perpendicular pe \bar{N} deci \bar{N}_i nu are componentă pe direcția lui \bar{N} . Derivând în raport cu u^i relația $\langle \bar{N}, \bar{r}_k \rangle = 0$ rezultă $\langle \bar{N}_i, \bar{r}_a \rangle = -\langle \bar{N}, \bar{r}_{ai} \rangle = -b_{ai}$. Notând $\bar{N}_i = A_i^k \bar{r}_k$ rezultă prin înmulțirea scalară cu \bar{r}_a că $A_i^k g_{ka} = -b_{ai}$ deci $A_i^k = -b_i^k$ și în concluzie avem ecuația Weingarten.

Relativ la ecuația Gauss faptul că b_{ij} este coeficientul lui \bar{r}_{ij} în direcția lui \bar{N} rezultă din definiția formei a II-a fundamentale ținând cont de faptul că \bar{N} este versor. Fie deci relația $\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + b_{ij} \bar{N}$ și să arătăm că Γ_{ij}^k sunt exact coeficienții Christoffel. Înmulțind scalar ultima relație cu \bar{r}_a rezultă $\Gamma_{ij}^k g_{ka} = \langle \bar{r}_{ij}, \bar{r}_a \rangle$. Derivând în raport cu u^j relația $\langle \bar{r}_i, \bar{r}_a \rangle = g_{ia}$ și ținând cont de ultima relație rezultă:

$$\Gamma_{ij}^k g_{ka} + \Gamma_{ja}^k g_{ki} = g_{ia,j}$$

relație în care permutând circular indicii $i \rightarrow j, j \rightarrow a, a \rightarrow i$ mai obținem:

$$\Gamma_{ja}^k g_{ki} + \Gamma_{ai}^k g_{kj} = g_{ji,a}$$

$$-\Gamma_{ai}^k g_{kj} - \Gamma_{ij}^k g_{ka} = -g_{aj,i}$$

; adunând ultimele 3 relații, ținând cont de simetria în indicii inferiori ai lui g și Γ , rezultă:

$$2\Gamma_{ja}^k g_{ki} = g_{ia,j} + g_{ji,a} - g_{ja,i}$$

sau încă:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ka} (g_{aj,i} + g_{ia,j} - g_{ij,a})$$

relația de definiție a simbolilor Christoffel.

O scriere mai compactă a ecuațiilor Gauss-Weingarten este:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & b_{i1} \\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & b_{i2} \\ -b_i^1 & -b_i^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{N} \end{pmatrix}.$$

7.47 Folosim notațiile de la exercițiul anterior. Fie deci curba $c : u^i = u^i(s)$, presupusă parametrizată canonic. Vectorul tangent este: $\frac{d}{ds} \bar{r} \circ c(s) = \bar{r}_i(c(s)) \frac{du^i}{ds}(s)$. Vectorul accelerație este:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \bar{r} \circ c(s) &= \bar{r}_k(c(s)) \frac{d^2 u^k}{ds^2}(s) + \bar{r}_{ij}(c(s)) \frac{du^i}{ds}(s) \frac{du^j}{ds}(s) = \\ &= \left(b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \bar{N} + \left(\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \bar{r}_k \end{aligned}$$

de unde rezultă ecuația geodezicelor

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2}(s) + \Gamma_{ij}^k(u^1(s), u^2(s)) \frac{du^i}{ds}(s) \frac{du^j}{ds}(s) = 0.$$

CAPITOLUL 8

Probleme de geometrie date la examenul de licență

Notă: Aceste probleme au fost date la Facultatea de Matematică a Universității "Al. I. Cuza" din Iași.

Iunie 2004

1) Se cer ecuațiile canonice ale dreptei δ care trece prin punctul $M_0(1, -1, 3)$, este paralelă cu planul $\pi : x - 2y + z + 7 = 0$ și este concurentă cu dreapta $d : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

2) Forma I-a fundamentală a unei suprafețe. Lungimi, unghiuri și arii pe o suprafață.

Februarie 2004

1) Se dau vectorii $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (2, 3, 0)$.

(i) Să se arate că $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în \mathbb{R}^3 .

(ii) Se cere matricea schimbării de baze de la B la baza canonică.

(iii) Se cer coordonatele vectorului $v = (5, 3, 7)$ în baza B .

2) (i) Să se arate că ecuația $x^2 + 2xy + 4y^2 - 4y = 0$ reprezintă o elipsă și să se determine diametrul ei conjugat direcției $(-1, 1)$.

(ii) Să se arate că în familia de plane $\pi_\lambda : \lambda x + 2y - 4z - 1 = 0$, λ parametru real, există un unic plan perpendicular pe planul $\pi : x + y + z - 1 = 0$ ce se cere determinat.

3) Forma I-a fundamentală a unei suprafețe. Lungimea unei curbe pe o suprafață.

Iunie 2003

1) Fie suprafața $S : \bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u + v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Să se arate că:

(i) planele tangente la curba $v = v_0 = \text{constant}$ pe S formează un fascicol. Se cere planul din fascicol perpendicular pe planul $\pi : z = 0$.

(ii) curba de ecuație $u = u_0 = \text{constant}$ pe S are curbura și torsiunea constantă.

2) Spații punctual euclidiene, distanța între două puncte, unghiuri, repere ortonormale.

Februarie 2003

1) Se dă planul $\pi : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$ și punctul $M(-12, -4, 18)$.

(i) Se cer coordonatele punctului M' simetricul lui M față de π și să se arate că M' aparține fiecărei conici din familia de conice $\Gamma_\lambda : x^2 + 2\lambda y^2 - x + y = 0, \lambda$ parametru real.

(ii) Discutați după parametrul λ natura conicelor din familia dată.

(iii) Să se reprezinte grafic conicele $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$.

2) Se dă suprafața $S : \bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv), h$ parametru real pozitiv.

(i) Se cer punctele lui S în care planul tangent este paralel cu vectorul $\bar{v} = (1, 1, 1)$ și arătați că aceste puncte aparțin curbei $C : \bar{r}(t) = \left(\frac{h}{2}(1 + \cos 2t - \sin 2t), \frac{h}{2}(-1 + \cos 2t + \sin 2t), ht\right)$.

(ii) Să se arate că C are curbura și torsiunea constantă.

3) Spații afine. Subspații afine, intersecții și uniuni.
